HOCHSCHULE
MITTWEIDA
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES

Mathematik

Übungsheft

zur Vorbereitung auf das Studium an der Hochschule Mittweida

Fakultät Mathematik/
Naturwissenschaften/Informatik
Fachgruppe Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Literatur :

- Schirotzeck, W. / Scholz, S.: Starthilfe Mathematik. Teubner Verlag, Stuttgart-Leipzig

- Schäfer, W. / Georgi, K.: Vorbereitung auf das Hochschulstudium. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirtschaftler. Vorbereitungsband, 7. Auflage. Teubner Verlag, Leipzig

- Göhler, W.: Höhere Mathematik.Formeln und Hinweise. 12. durchgesehene Auflage. Verlag Harry Deutsch. Thun und Frankfurt

(u.a.)

1. Elementare Rechenoperationen im Bereich der reellen Zahlen

1.1. Schwerpunkte

- Grundrechenarten mit reellen Zahlen
- Bruchrechnung
- Betragsdefinition

1.2. Übungsaufgaben

1.2.1. Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

a) $(10a+8b) + (5a-3b)$ b) $(24x+18y) - (16x+9y)$

c) $20m-[(4m+2n)+(6m-n)]$ d) $(7a-2b)-[(3a-c)-(2b-3c)]$

e) $8m(-2n)-5n(-4m)$ f) $14(3s+4t)-8(5s-3t)$

g) $(7s-10t)(-2s-3t)$

h) $7a-[2-(3b-4a)\cdot 5-(2a-3)(-b+4)]$

1.2.2. Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ausmultiplizieren:

a) $8\,uv-10\,uw+14\,uz$ b) $57a^2-21ab-42ac$

c) $x^2-3x+xy-3y$ d) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b$

1.2.3. Kürzen Sie folgende Brüche:

a) $\dfrac{64\,a^2b}{16\,ab^2}$ b) $\dfrac{6x-12}{7x-14}$ c) $\dfrac{3ax^2-2a^2x}{2ax^2-3a^2x}$

d) $\dfrac{2ax-a+10x-5}{a-2ax-10x+5}$

1.2.4. *Vereinigen Sie folgende Brüche:*

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ b) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$ c) $\frac{x^2}{y} - y$

d) $\frac{2\ a-3b+4}{6} - \frac{3a-4b+9}{8} + \frac{a-1}{12}$

e) $\frac{3\ (2a-3b)}{8} - \frac{2\ (3a-5b)}{3} + \frac{5\ (a-b)}{6}$

f) $\frac{3a-4b}{4ab-2b^2} + \frac{8a-3b}{8a^2-4ab}$

g) $\frac{5x+4}{x-2} - \frac{3x-2}{x-3} - \frac{x^2-2x-17}{x^2-5x+6}$

1.2.5. *Vereinfachen Sie:*

a) $5x \cdot \frac{2}{15}$ b) $\frac{2a}{3bc} \cdot (-6\,b^2)$

c) $\left(\frac{a}{4b} - \frac{4b}{a}\right) \cdot 4ab$ d) $(x^2 - y^2) \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

e) $\frac{8ax^2}{9b} \cdot \frac{3b^2}{4x}$ f) $\frac{u+v}{7p} \cdot \frac{14p^2q}{6u+6v}$

g) $\frac{24a^2}{7b} \div 6a$ h) $x \div \frac{2a}{b}$

i) $\frac{8ab}{15cd} \div \frac{4a}{5c}$ j) $\frac{8x^2y+12xy^2}{10x^2} \div \frac{-4x^3y-6y^2x^2}{25xy^2}$

1.2.6. Vereinfachen Sie folgende Doppelbrüche:

a) $\dfrac{\frac{3}{a}-\frac{5}{b}}{\frac{5}{a}-\frac{3}{b}}$ b) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}}$

c) $\dfrac{\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}$ d) $1 - \dfrac{a}{1-\frac{1}{1+a}}$

1.2.7. Lösen Sie die Beträge auf und vereinfachen Sie, falls möglich:

a) $|x|$ b) $|x-1|$ c) $|-2x+3|$

d) $|3x+2|-1$ e) $3x+2-|x-1|$ f) $2|x-1| - |x+1|$

2. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

2.1. Schwerpunkte

- Potenzgesetze
- Binomische Formeln
- Wurzelgesetze
- Logarithmengesetze

2.2. Übungsaufgaben

2.2.1. Potenzen

2.2.1.1. Fassen Sie zusammen:

a) $\frac{5}{6}a^3 - \frac{3}{7}b^3 - \frac{4}{9}a^3 + \frac{2}{3}b^3$ b) $-x^3 + (-2a)^4 - 2a^4 + (-3x)^3$

c) $pa^n + qa^n - ra^n$

d) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

2.2.1.2. Vereinfachen Sie:

a) $x^{n-b} \cdot x^{m+b}$ b) $x^3 y^4 \cdot x^{n-3} \cdot y^{n-5}$

c) $(-a)^6 \cdot (-a)^5 \cdot a^2$ d) $q \cdot q^{n-1}$

e) $q \cdot q^n - 1$ f) $q\left(q^n - 1\right)$

g) $\dfrac{a^n}{a^3}$ h) $\dfrac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$

i) $\dfrac{a^{2n-1}\, b^{n+1}}{a^{n+1}\, b^{2n-1}}$ j) $\dfrac{4a^6 b^4}{9c^4 d^3} \cdot \dfrac{15bc^2}{8a^4 d} \cdot \dfrac{6d^5}{5b^3}$

k) $\dfrac{21a^3b^2\, x^{n+1}}{18c^3\, y^2\, z^{n-3}} \div \dfrac{35a^2b^3\, x^{n+2}}{27c^2y^4\, z^{n-2}}$

l) $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x}$ m) $\dfrac{1+x^2}{x^5} - \dfrac{1}{x^3}$

n) $\dfrac{1+x}{x^n} - \dfrac{1-x}{x^{n-1}} - \dfrac{1}{x^{n-2}}$

2.2.1.3. Fassen Sie die folgenden Terme zusammen, indem Sie die binomischen Formeln anwenden!

a) $(2x-1)^2 - (3-x)(3+x)$

b) $\left(4a^2 - 3\right) \cdot \left(4a^2 + 3\right) - (3a-4)^2 + (5a+1)^2$

c) $(m+n)^3 - (m-n)^3$ d) $\dfrac{25a^2 - 130ab + 169b^2}{25a - 65b}$

e) $\dfrac{a^4 - b^4}{(a+b)^2\,(a-b)}$

2.2.2. Wurzeln

Vereinfachen Sie, indem Sie die Wurzelgesetze anwenden!

a) $5\sqrt{a}+8\sqrt{a}-11\sqrt{a}$ b) $a\cdot\sqrt[n]{x}+b\cdot\sqrt[n]{x}-c\cdot\sqrt[n]{x}$

c) $6\cdot\sqrt{27}-7\cdot\sqrt{75}$ d) $\sqrt{2\sqrt{5a}-5\sqrt{2b}}\cdot\sqrt{2\sqrt{5a}+5\sqrt{2b}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^{15}}}$ f) $\sqrt[2n+1]{a^{4n^2-1}}$

g) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ h) $\sqrt[3x]{z^{5-2n}}\cdot\sqrt[4x]{z^{2n-4}}$

i) $(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ j) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

2.2.3. Logarithmen

2.2.3.1. Ermitteln Sie x:

a) $\log_5 125=x$ b) $\log_8 2=x$ c) $\mathrm{ld}\ 16=x$

d) $\log_{10} 0{,}1=x$ e) $\lg x=-3$ f) $\log_{64} x=0{,}5$

g) $\log_x\ 144=2$

2.2.3.2. Formen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze folgende Ausdrücke um:

a) $\lg\frac{ab}{cd}$ b) $\lg 10a\,(b-c)$ c) $\lg(ab)^3$

d) $\lg a^5b^4$ e) $\lg a\sqrt[3]{b}$ f) $\lg\sqrt[3]{a^2b^4}$

g) $\lg\frac{x^2\sqrt{a}}{c^3y}$ h) $\lg\frac{a^4\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

2.2.3.3. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:

a) $2\lg x-\frac{1}{2}\lg y$ b) $\frac{1}{3}\lg(u+v)+\frac{1}{3}\lg(u-v)$

c) $-2\lg a-\frac{1}{2}\lg b$ d) $2\lg 5+\lg 4$

e) $\lg\frac{x}{y}+\lg(xy)-3\lg(x-y)$ f) $\frac{1}{2}\lg x+\frac{1}{2}\lg(xy)-\lg y$

2.2.3.4. Berechnen Sie x ohne Benutzung des Taschenrechners:

a) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$ b) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2 + \lg 32)}}$

c) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

3. Gleichungen und Ungleichungen

3.1. Schwerpunkte

- Elementare Umformungsregeln für Gleichungen
- Betragsdefinition
- Lösungsformel für quadratische Gleichungen
- Potenz-, Wurzel- und Logarithmengesetze
- Quadrantenbeziehungen, Zusammenhänge zwischen den verschiedenen trigonometrischen Funktionen
- Umformungsregeln für Ungleichungen

3.2 Übungsaufgaben

3.2.1. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $8(3x - 2) - 7x = 13x + 5(12 - 3x)$

b) $\frac{3x+4}{7} - \frac{9x+44}{5} = \frac{5x+12}{3} - \frac{9x+30}{4}$

c) $\frac{x-8}{x-9} = \frac{x-5}{x-7}$

d) $1 - \frac{2x+1}{3x-15} = \frac{11-x}{2x-10}$

e) $\frac{5x-1}{3x+3} - \frac{3x+2}{2(x-1)} = \frac{x^2 - 30x + 2}{6x^2 - 6}$

f) $\frac{4}{x+3}+\frac{12}{x+4}=\frac{12(2x+1)}{x^2+7x+12}$

g) $\frac{4x^2-3x}{1+x}-\frac{3x}{1-x}=\frac{4x^3+2x-4x^2+16}{x^2-1}$

h) $|x-5| = 7$

i) $|x-4|=|2x+3|$

j) $|x+1|+|2x+3|-|x-4|=8$

k) $|x|\cdot|x-4|=5$

3.2.2. Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2+2x=63$ b) $x^2=\frac{3}{2}x-\frac{9}{16}$

c) $(x - 7)(x - 4) + (x - 6)(x - 5) = -6$

d) $\frac{4x-5}{3x-1}+\frac{x-7}{2x-11}=2$

e) $\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x-4}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2-4}=0$

f) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{3}{x}+\frac{1}{4}=\frac{2x-1}{2x}-\frac{12}{x^2+x}$

3.2.3. Wurzelgleichungen, Exponentialgleichungen, logarithmische Gleichungen

3.2.3.1. Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:

a) $7 + 3\sqrt{2x+4} = 16$ b) $\sqrt{x} + 2 = x$

c) $3\sqrt{4x+10} - 4\sqrt{2x+6} = 0$ d) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{5x-4}$

e) $\sqrt{x - 1 + \sqrt{2x+5}} - 2 = 0$

3.2.3.2. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen:

a) $q^{2\,(4x-1)} = q^{3\,(2x+4)}$ b) $5^{3x-5} = 25^{x+3}$

c) $25 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} = 37 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5}$ d) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$

e) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$ f) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

3.2.3.3. Lösen Sie die folgenden logarithmischen Gleichungen:

a) $4 + 3\lg x = 5{,}2$ b) $\frac{1}{3}\lg x^2 + \frac{1}{3}\lg x^3 = 0{,}0234$

c) $2\lg(x+1) = \lg(x-1) + 1$

d) $\frac{1}{4}\lg x^5 - 2(\lg 2 + \lg 3) = 3\lg\sqrt[4]{x} - 3\lg\sqrt{x}$

e) $\lg(5^x) = \lg(2^x) + 2$ f) $5^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x}$

3.2.4. Goniometrische Gleichungen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden goniometrischen Gleichungen:

a) $\tan x = 0{,}5$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $\cos x = -0{,}4$ d) $\cot x = -1{,}4$

e) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}309$ f) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -0{,}342$

g) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x - 1 = 0$ h) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$

i) $\cot x = \sqrt{2}\sin x$ j) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$

k) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ l) $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2} = 0$

m) $\sin 2x = \tan x$ n) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

3.2.5. Umstellen von Formeln

Lösen Sie die folgenden Formeln nach den angegebenen Größen auf:

a) $K_n = K_o\,(1+i)^n$ $\quad i, \quad n$

b) $K_n = E \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $\quad E, \quad n$

c) $s = v_0 t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ $\quad v_0, \quad g$

d) $C = 4\pi K \cdot \dfrac{R_1 R}{R_1 - R}$ $\quad R, \quad R_1$

e) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ $\quad R, \quad R_2$

3.2.6. Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

a) $\dfrac{6x-1}{3} < -\dfrac{12x-3}{4}$ b) $(x+6)^2 \le 25$

c) $2x - 3 > \frac{1}{x} + 1$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{x-2}} \ge 1$

e) $x - 1 \le \sqrt{x+1}$ f) $|2x-1| + x < 2$

g) $x^2 < 2|x| + x$ h) $|3x-2| \le x + 4$

i) $|3x-1| < |3-x|$

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1. *Schwerpunkte*

- Elementare Umformungen
- Aufstellen von Gleichungssystemen
- Einsetzverfahren
- Additionsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren

4.2. *Übungsaufgben*

4.2.1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 &= -30 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 - 14 \\ x_2 &= 3x_1 - 22 \end{aligned}$$

c)
$$4 - \frac{1}{3}\left(2x - y - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$$
$$4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$$

d)
$$\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$$
$$\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ ax_1 - x_2 &= b \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 5a \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5b \end{aligned}$$

4.2.2. Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

a)
$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$$

4.2.3. Textaufgaben

a) Ein Vater ist jetzt 36 Jahre älter als sein Sohn. Nach 5 Jahren wird der Vater um $\frac{1}{4}$ mehr als dreimal so alt wie sein Sohn sein. Wie alt sind gegenwärtig Vater und Sohn?

b) Bei der Saftherstellung werden zwei Arten von Säften gemischt. Nimmt man 3 Flaschen vom ersten und 7 Flaschen vom zweiten, errechnet sich der Durchschnittspreis einer Flasche zu 2,-DM. Mischt man aber umgekehrt 7 Flaschen der ersten Saftart und 3 Flaschen der zweiten, kostet eine Flasche im Durchschnitt 2,40 DM. Wieviel kostet eine Flasche der beiden verwendeten Säfte?

c) Auf dem 100 langen Umfang eines Kreises bewegen sich zwei Körper. Sie begegnen sich aller 20 s, wenn sie sich in derselben Richtung bewegen und aller 4 s, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Wieviel Meter legt jeder der beiden Körper in einer Sekunde zurück?

5. Mengenlehre, Funktionen

5.1. Schwerpunkte

- Mengenbegriff
- Angabe von Mengen
- Mengenrelationen, Mengenoperationen
- Funktionsbegriff
- graphische Darstellung elementarer Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen
- Umkehrfunktion
- Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

5.2. *Übungsaufgaben*

5.2.1. Mengenlehre

5.2.1.1. Geben Sie folgende Mengen an:

G: gerade Zahlen U: ungerade Zahlen
A: Quadratzahlen B: durch 3 teilbare Zahlen
C: Zahlen, die bei der Division mit 6 den Rest 1 lassen.
Die Grundmenge Ω bestehe aus allen positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 16 sind.

5.2.1.2. Bestimmen Sie mit den Mengen aus Aufgabe 5.2.1.1.:

$G \cup U;\quad G \cap U,\quad G \cap A,\quad A \setminus G,\quad G \cap B,\quad U \setminus C,\quad (C \setminus U) \cup A,$
$(C \setminus U) \cap A,\quad A \times C,\quad C \times A,\quad \overline{A \cup B}$

5.2.1.3. Bestimmen Sie:

$A \cup B,\quad A \cap B,\quad A \setminus B,\quad B \setminus A,\quad B \cup D,\quad C \setminus B,\quad C \cup D \cup E,\quad D \cap E,$

wenn $A = [-4, -1],\quad B = [-2, 3],\quad C = (0,1),\quad D = [1,4),\quad E = (4, \infty)$.

5.2.1.4. Skizzieren Sie folgende Punktmengen in einem Koordinatensystem:

$$A = \{(x,y) \;/\; y \geq -2 \wedge x,y \in \Re\}$$

$$B = \{(x,y) \;/\; y \geq x\,(x-4) \wedge x,y \in \Re\}$$

$$C = \{(x,y) \;/\; y \leq x - 1 \wedge x,y \in \Re\}$$

Schraffieren Sie folgende Punktmengen:

$A \cup B,\quad B \cap C,\quad (C \cap B) \cup B,\quad A \cap B \cap C,\quad (A \setminus C) \cap B$

5.2.1.5. 235 Studenten der Betriebswirtschaft schrieben Klausuren in den Fächern Finanzmathematik, Betriebsstatistik und Englisch.
85 Studenten bestanden alle 3 Klausuren, 68 genau 2 und 37 nur eine der 3 Klausuren.

a) Wieviele Studenten bestanden keine Klausur?
b) In Englisch bestanden 170 Studenten, in Finanzmathematik 146 Studenten. Wieviel Studenten bestanden im Fach Betriebsstatistik?

5.2.2. Funktionen

5.2.2.1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich D und den Wertebereich W, und bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion:

a) $f(x) = 3x + 8$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

d) $f(x) = |x - 3| + 2$

e) $f(x) = 2e^x + 1$

f) $f(x) = 2\lg(2x - 3)$

5.2.2.2. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Symmetrieeigenschaften:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - x$

c) $f(x) = x - x^2$

d) $f(x) = |x| + 2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$

f) $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$

5.2.2.3. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Monotonie; zerlegen Sie dabei gegebenenfalls den Definitionsbereich in Monotonieintervalle:

a) $f(x) = mx + n \quad , \; m \neq 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

d) $f(x) = |x| - x$

e) $f(x)=2e^{-x}+5$

5.2.2.4. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen:

a) $f(x)=2x-4$

b) $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$

c) $f(x)=-2x^2+1$

d) $f(x)=x^2-2x-3$

e) $f(x)=\frac{1}{x-1}+1$

f) $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

g) $f(x)=\sqrt{2-x}$

h) $f(x)=2\,|x+1|-2$

i) $f(x)=2e^x-1$

j) $f(x)=\ln(2x-3)$

k) $f(x)=|2x|-1$

l) $f(x)=-\frac{1}{2}|x-2|+1$

m) $f(x)=|x+1|+x$

n) $f(x)=2|x-1|-|x+1|$

o) $f(x)=\left|x^2+6x+7\right|$

p) $f(x)=2\sin x-1$

q) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

r) $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

s) $f(x)=-2\cot(2x)+1$

5.2.2.5. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-x^2+4x-3}{2x^2-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x-3}{2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2-2x}{3-x}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3-4x^3}{2x^3-5x+1}$

5.2.2.6. Bestimmen Sie bei folgenden Funktionen die Unstetigkeitsstellen. Geben Sie die Art der Unstetigkeit an:

a) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-3x+2}$

b) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

c) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

d) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

6. Vektorrechnung und Analytische Geometrie

6.1. *Schwerpunkte*

- Geradengleichungen in vektorieller und parameterfreier Form
- Ebenengleichungen in vektorieller und parameterfreier Form
- Schnittpunkte und Schnittwinkel
- Parallelität und Orthogonalität
- Vektoren
- Skalar- und Kreuzprodukt

6.2. *Übungsaufgaben*

6.2.1. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Geraden in parameterfreier Form, die durch die angegebenen Punkte geht.

a) P_1 (-2; 3) und P_2 (4; 6) b) P_1 (1; 9) und P_2 (5; 2)

c) P_1 (3; 6) und P_2 (8; 6) d) P_1 (2; -2) und P_2 (2; 12)

6.2.2. Bestimmen Sie Schnittpunkt S und Schnittwinkel σ zwischen den folgenden Geraden. Danach ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Geraden durch diesen Schnittpunkt, die orthogonal (senkrecht) zur jeweils ersten gegebenen Geraden verläuft.

a) $3x - 2y + 5 = 0$, $5x + 3y - 4 = 0$

b) $y = 2x - 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 5$

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, $-\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$

6.2.3. a) Welchen Abstand hat der Punkt P (4; 1) von der Geraden g: $y = -\frac{4}{3}x - 2$, und welcher Punkt der Geraden liegt P am nächsten?

b) Wie lautet die Gleichung des von P (3; 4) auf die Gerade $y = 2x - 2$ gefällten Lotes?

c) Bilden die Geraden $3x-2y+9=0$, $-2x+y-1=0$ und $3x-y-6=0$ die Seiten eines Dreiecks?

6.2.4. Die Vektoren $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)^T$ und $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$ sind gegeben durch $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=25$, $a_1=2$, $b_1=-15$, $b_2=20$, $\cos(\overrightarrow{e_3}, \vec{a})=0{,}8$.

a) Berechnen Sie a_2, a_3 und b_3.

b) Welche Winkel schließen $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ mit den Koordinatenachsen ein?

c) Bestimmen Sie $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

d) Ermitteln Sie $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

6.2.5. Gegeben sind die Vektoren
$\vec{a}=(2,-1,1)^T$; $\vec{b}=(1,0,3)^T$; $\vec{c}=(-3,-5,1)^T$.

Berechnen Sie:

a) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

c) $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{a}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

d) $[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}]$

6.2.6. Im Punkt A (3; 2; 6) greift ein Vektor der Länge 12 an, der in Richtung auf Punkt B (-1; 6; -2) weist. In welchem Punkt endet dieser Vektor?

6.2.7. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das von $\vec{a}=(2;-3;2)^T$ und $\vec{b}=(5;7;-2)^T$ aufgespannt wird?

6.2.8. Geben Sie für die Geraden aus a) - c) jeweils eine Geradengleichung an.

a) Gerade verläuft durch P (-1; 3;1) parallel zur z-Achse.

b) Gerade verläuft durch P (3; 2; 1) parallel zum Vektor $\vec{a} = (2; 3; 1)^T$.

c) Gerade verläuft durch die Punkte P_1 (-1; 1; 2) und P_2 (2; -1; 1).

d) Untersuchen Sie, ob die Punkte R (-7; 5; 4) bzw. S (8; -4; -1) auf der Geraden aus Aufgabe c) liegen.

6.2.9. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A (5; -1), B (6; 3), C (2, 4) und D (-5; 5) gegeben.

a) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden, die durch die Punkte A und D bzw. C und D verlaufen.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

6.2.10. Gegeben sind im Koordinatensystem $\{0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ die Gerade g mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -22 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \Re, \quad \text{und der Punkt Q (6; -8; 0).}$$

a) $P(x_0;y_0;0)$ sei ein Punkt auf der Geraden g. Berechnen Sie für diesen Fall x_0 und y_0. Weisen Sie auch nach, daß die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ betragsgleich und orthogonal zueinander sind.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R für den Fall, daß das Viereck 0PRQ ein Quadrat ist.

c) M sei der Mittelpunkt des Quadrates 0PRQ. In M wird auf dem Quadrat 0PRQ die Senkrechte errichtet. Diese schneidet die Gerade g im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

d) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle$ QSP !

e) Gegeben sind Geraden durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad r \in \Re.$

Genau eine dieser Geraden schneidet die Gerade g. Ermitteln Sie den Zahlenwert des Parameters a für diesen Fall.

6.2.11. Geben Sie für die durch die nachfolgenden Angaben festgelegten Ebenen E eine Gleichung in Parameterdarstellung und in parameterfreier Form an.

a) P (1,-1, 2); Q (1, 2, -3); R (-2, 0, 4) liegen auf E.

b) A (2, -1, 3) $\in$E; E liegt parallel zu den Vektoren $\vec{a} = (-1, 2, 3)^T$ und $\vec{b} = (2, -1, 4)^T$.

c) P (-2, 1, 3) $\in$E und $\vec{n} = (-1, 1, 4)^T$ sei Normalenvektor von E.

6.2.12. Gegeben Sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

a) $\vec{a} = (-1, 3, 1)^T, \quad \vec{b} = (2, -1, -1)^T, \quad \vec{c} = (3, -4, -2)^T$

b) $\vec{a} = (1, 1, 1)^T, \quad \vec{b} = (1, 2, 3)^T, \quad \vec{c} = (1, 4, 9)^T$

c) $\vec{a} = (2, -4, 0)^T, \quad \vec{b} = (3, 6, -3)^T, \quad \vec{c} = (0, -4, 1)^T$

Lösen Sie jeweils die folgenden 3 Unteraufgaben:

I) Der Vektor $\vec{c}$ ist, soweit möglich, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darzustellen.

II) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

III) Geben sie die Gleichung derjenigen Ebene E in vektorieller Darstellung, in Parameterdarstellung und in der parameterfreien (allgemeinen) Darstellung an, die durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Kann in I) keine Linearkombination angegeben werden, so geben Sie die Gleichung derjenigen Ebene an, die parallel zur Ebene E verläuft und durch den Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{c}$ geht.

6.2.13. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A (2; 2; -2), B (4; -4; 2), C (8; 2; 2) und D (6; 8; -2) gegeben.

a) Zeigen Sie, daß das Dreieck ΔABC gleichschenklich ist. Berechnen Sie die Länge seiner Basis und die Größe eines Basiswinkels.

b) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BD}$ zueinander orthogonal sind.

c) Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene E. Geben Sie die Gleichung der Ebene E in allgemeiner Form an und untersuchen Sie, ob der Punkt D in dieser Ebene liegt.

6.2.14. Wie groß ist das Volumen der dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten A (1; 1; 1), B (-1; 1; 1), C (1; -1; 1) und D (1; 1; -1)?

7. Zahlenfolgen und Zahlenreihen

7.1. Schwerpunkte

- Begriffe Zahlenfolge, Zahlenreihe
- rekursive und explizite Bildungsvorschrift
- arithmetische und geometrische Zahlenfolgen und Reihen
- Eigenschaften von Zahlenfolgen
- Grenzwerte von Zahlenfolgen

7.2. Übungsaufgaben

7.2.1. Gegeben ist die Zahlenfolge $\{a_n\}$ durch $a_n = \dfrac{3n+11}{2n-1}$ $\qquad n = 1, 2, \ldots.$

a) Berechnen Sie die Glieder a_3 und a_7.
b) Zeigen Sie, ob die Zahl 6,5 ein Glied der Folge ist.
c) Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie.
d) Ermitteln Sie den Grenzwert der Zahlenfolge $\{a_n\}$.

7.2.2. $\{a_n\}$ sei eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_{12} = 14$ und $a_3 = 56$.

a) Ermitteln Sie a_1 und d.
b) Stellen Sie für die Folge $\{a_n\}$ eine rekursive und eine explizite Bildungsvorschrift auf.
c) Ermitteln Sie die Summe der ersten 12 Glieder.

7.2.3. In einem Kino hat die erste Sitzreihe 10 Plätze, die zweite 12, die dritte 14 usw., d.h. jede nachfolgende Reihe hat zwei Plätze mehr als die vor ihr liegende.

a) Wieviel Sitzplätze hat das Kino, falls 15 Sitzreihen aufgebaut sind?
b) Wieviel Reihen muß das Kino haben, wenn mindestens 250 Besucher Platz finden sollen?

7.2.4. $\{a_n\}$ sei eine geometrische Zahlenfolge, die durch die Glieder $a_2 = \dfrac{1}{2}$ und $a_5 = \dfrac{1}{128}$ gegeben ist.

a) Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für die Folge $\{a_n\}$ an.
b) Berechnen Sie, wieviele Glieder der Folge $\{a_n\}$ größer als $3 \cdot 10^{-5}$ sind.
c) $\{s_n\}$ ist die zur Folge $\{a_n\}$ gehörende Partialsummenfolge. Berechnen Sie s_8.
d) Ermitteln Sie den Grenzwert der Partialsummenfolge.

7.2.5. Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-4}{4n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n^3}{5n^2-3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{4n} - \frac{2-4n^2}{2n^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+(-1)^n}{n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n$

8. Differentialrechnung für Funktionen mit einer Variablen

8.1. Schwerpunkte

- Begriff und geometrische Deutung der 1. Ableitung einer Funktion
- Differentiationsregeln
- Ableitungen höherer Ordnung
- Untersuchungen von Funktionen mittels ihrer Ableitungen

8.2. Übungsaufgaben

8.2.1. Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie, falls möglich:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2x - 4$

b) $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - x^5 \cdot \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

f) $f(x) = x \cdot e^x$

g) $f(x) = x \cdot \ln x + x^2 e^x$

h) $f(x) = (\frac{1}{2}x + 3x^2) \cdot e^x$

i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

j) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^3-1)^2}$

k) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

l) $f(x) = (2x^2 - 4)^7$

m)	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$	n)	$f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$
o)	$f(x)=e^{-2x}-\ln(2x-5)$	p)	$f(x)=2^{\sqrt{x}}$
q)	$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$	r)	$f(x)=x^3\cdot e^{3x}\cdot\ln(x^2)$
s)	$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	t)	$f(x)=\cot(3x^2)+\arctan(2x)$

8.2.2. Für welche Werte von x steigt (fällt) die Kurve der Funktion

$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$?

An welchen Stellen hat die Kurve waagerechte Tangenten?

8.2.3. In welchen Kurvenpunkten schneidet der Graph der Funktion

$f(x)=\frac{x^2-3}{2x}$ die x-Achse unter einem Winkel von 45 ° ?

8.2.4. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion

$f(x)=x\cdot\sqrt{25-x^2}$ an der Stelle $x=3$.

8.2.5. Führen Sie von folgenden Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch. Bestimmen Sie dabei:

- *Definitionsbereich*
- *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*
- *Verhalten im Unendlichen, Asymptoten*
- *Unstetigkeitsstellen*
- *Symmetrie*
- *lokale Extrempunkte*
- *Wendepunkte*

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen:

a)	$f(x)=x^3-6x^2+8x$	b)	$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$
c)	$f(x)=\frac{x^3}{3(x-1)^2}$	d)	$f(x)=x+\sqrt{3-2x}$
e)	$f(x)=x\cdot e^{2-x}$	f)	$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$ in $[0,2\pi]$

8.2.6. Lösen Sie die folgenden Extremwertaufgaben:

a) Eine positive ganze Zahl n soll so in zwei positive ganzzahlige Summanden zerlegt werden, daß
1. deren Produkt ein Maximum,
2. die Summe ihrer Quadrate ein Minimum wird.
Bestimmen Sie die Summanden sowie das Produkt und die Summe.

b) Aus einem rechteckigen Stück Blech mit den Seitenlängen $a = 9\,cm$ und $b = 6\,cm$ soll nach Aussägen je eines Quadrates der Seitenlänge x an den Ecken des Rechtecks und Hochbiegen der dadurch entstandenen Randflächen ein oben offenes Kästchen mit möglichst großem Rauminhalt hergestellt werden.
Berechnen Sie x und V_{Max}.

c) Welche Maße muß eine allseitig geschlossene zylindrische Blechdose von einem Rauminhalt V haben, wenn der Blechverbrauch bei der Herstellung möglichst klein sein soll?

d) Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe h und dem Grundkreisdurchmesser d soll ein gerader Kreiszylinder mit möglichst großem Volumen einbeschrieben werden, so daß sein Grundkreis in der Ebene des Kegelkreises liegt. Wie groß sind der Durchmesser x und die Höhe y des Zylinders zu wählen, wie groß wird sein maximaler Rauminhalt?

9. Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen

9.1. Schwerpunkte

- Begriff des bestimmten Integrals
- Begriff des unbestimmten Integrals
- Geometrische Deutung
- Grundintegrale, elementare Integrationsregeln
- Berechnung bestimmter Integrale, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Eigenschaften bestimmter Integrale
- Lineare Substitution
- Flächenberechnung mittels Integration
- Berechnung von Rotationsvolumen

9.2. Übungsaufgaben

9.2.1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int\left(x^4 - 7x + 8\right) dx$ b) $\int 2\sqrt{x}\, dx$

c) $\int 4 \cdot \sqrt[3]{x^4}\, dx$ d) $\int\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

e) $\int\left(\sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$ f) $\int \frac{x^3 + x}{5x^3}\, dx$

g) $\int \sqrt{ax}\, da$ h) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$

i) $\int\left(x^3 - \frac{2}{x^3}\right) dx$ j) $\int\left(\frac{1}{3}e^x - 2^x\right) dx$

k) $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}\, dx$ l) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx$

9.2.2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_1^3\left(x^2 + 5x - 3\right) dx$ b) $\int_1^{-2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

c) $\int_3^4\left(2x + \frac{2}{x}\right) dx$ d) $\int_2^3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

e) $\int_{-1}^2\left(3^x + x^3\right) dx$ f) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(2x+7)^{-2}}$

9.2.3. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

a) $\int_{-1}^2 (3x+2)^2\, dx$ b) $\int \sqrt[3]{5 - 6x}\, dx$

c) $\int_2^4 2e^{3x-6}\, dx$ d) $\int_7^8 \sqrt{\frac{1}{2}x - 3}\, dx$

e) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{5 - 3x}}$ f) $\int \frac{6}{2x+1}\, dx$

g) $\int e^{-wx}\, dx$ h) $\int \cos x \cdot \sin 2x\, dx$

9.2.4. Berechnen Sie die Flächeninhalte der von folgenden Kurven begrenzten endlichen Flächenstücke:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 35\,; \quad f(x) = 0$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6\,; \quad f(x) = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2; \quad f(x) = x + 6$

d) $f(x) = \sqrt{-x+4}\,; \quad f(x) = \sqrt{2x+4}; \quad f(x) = 0$

e) $f(x) = 2x^3; \quad f(x) = 3x^2 - 1$

9.2.5. In welchem Abstand x_1 muß man eine Parallele zur y-Achse ziehen, damit die von der y-Achse, der x-Achse, der Geraden x = 1 und der Kurve $y = e^x$ begrenzte Fläche im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird?

9.2.6. Berechnen Sie die Volumen der Rotationskörper, die entstehen, wenn die durch die angegebenen Funktionen begrenzten Flächen zwischen den entsprechenden Grenzen um die x-Achse rotieren.

a) $f(x) = \sqrt{x}; \quad f(x) = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$

b) $f(x) = \frac{4}{x}, \quad f(x) = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$

c) $f(x) = -x^2 + 5; \quad f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x + \frac{4}{x}, \quad f(x) = 5$

e) $f(x) = 2\sqrt{x}, \quad f(x) = x$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 1

1.2.1. a) $15a + 5b$ b) $8x + 9y$

c) $10m - n$ d) $4a - 2c$

e) $4mn$ f) $2s + 80t$

g) $-14s^2 - st + 30t^2$ h) $18b - 5a - 2ab - 14$

1.2.2. a) $2u(4v - 5w + 7z)$ b) $3a[19a - 7(b + 2c)]$

c) $(x - 3)(x + y)$ d) $(a - b)(2x - 5y + 1)$

1.2.3. a) $\frac{4a}{b}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{3x - 2a}{2x - 3a}$

d) -1

1.2.4. a) $\frac{bc + ac - ab}{abc}$ b) $\frac{2a}{a^2 - b^2}$ c) $\frac{x^2 - y^2}{y}$

d) $\frac{a - 13}{24}$ e) $\frac{33b - 10a}{24}$

f) $\frac{3\left(2a^2 - b^2\right)}{4ab(2a - b)}$ g) $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

1.2.5. a) $\frac{2x}{3}$ b) $-\frac{4ab}{c}$ c) $a^2 - 16b^2$

d) $\frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x}$ e) $\frac{2abx}{3}$ f) $\frac{pq}{3}$

g) $\frac{4a}{7b}$ h) $\frac{bx}{2a}$ i) $\frac{2b}{3d}$

j) $-\frac{5y^2}{x^2}$

1.2.6. a) $\frac{5a-3b}{3a-5b}$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{x}{y}$

1.2.7. a) $\begin{matrix} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x-1 \text{ für } x \geq 1 \\ -x+1 \text{ für } x < 1 \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} -2x+3 \text{ für } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x-3 \text{ für } x > \frac{3}{2} \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} 3x+1 \text{ für } x \geq -\frac{2}{3} \\ -3x-3 \text{ für } x < -\frac{2}{3} \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} 2x+3 \text{ für } x \geq 1 \\ 4x+1 \text{ für } x < 1 \end{matrix}$ f) $\begin{matrix} x-3 \text{ für } x \geq 1 \\ -3x+1 \text{ für } -1 \leq x < 1 \\ -x+3 \text{ für } x < -1 \end{matrix}$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 2

2.2.1.1. a) $\frac{7}{18}a^3 + \frac{5}{21}b^3$ b) $-28x^3 + 14a^4$

c) $a^n(p+q-r)$ d) $(9a+2b) \cdot x^4$

2.2.1.2. a) x^{n+m} b) $x^n y^{n-1} = \frac{(xy)^n}{y}$

c) $-a^{13}$ d) q^n

e) $q^{n+1} - 1$ f) $q^{n+1} - q$

g) a^{n-3} h) a^2

i) $a^{n-2} b^{2-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}$ j) $\frac{a^2 b^2 d}{c^2}$

k) $\dfrac{9ay^2z}{10bcx}$ l) $\dfrac{x^5+x^2+1}{x^6}$

m) $\dfrac{1}{x^5}$ n) $\dfrac{1}{x^n}$

2.2.1.3. a) $5x^2-4x-8$ b) $16a^4+16a^2+34a-24$

c) $6m^2n+2n^3$ d) $\dfrac{5a-13b}{5}$

e) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

2.2.2. a) $2\sqrt{a}$ b) $(a+b-c)\cdot\sqrt[n]{x}$

c) $-17\sqrt{3}$ d) $\sqrt{10\ (2a-5b)}$

e) $b\cdot\sqrt[5]{a^2}$ f) a^{2n-1}

g) $\sqrt[3]{a^2}$ h) $\sqrt[6x]{z^{4-n}}$

i) 1 j) $(a+1)\sqrt{ab}$

2.2.3.1. a) $x=3$ b) $x=\dfrac{1}{3}$ c) $x=4$

d) $x=-1$ e) $x=0{,}001$ f) $x=8$

g) $x=12$

2.2.3.2. a) $\lg a+\lg b-\lg c-\lg d$ b) $1+\lg a+\lg(b-c)$

c) $3(\lg a+\lg b)$ d) $5\lg a+4\lg b$

e) $\lg a + \frac{1}{3}\lg b$ f) $\frac{2}{3}\lg a + \frac{4}{3}\lg b$

g) $2\lg x + \frac{1}{2}\lg a - 3\lg c - \lg y$ h) $\frac{23}{6}\lg a$

2.2.3.3. a) $\lg \frac{x^2}{\sqrt{y}}$ b) $\lg \sqrt[3]{u^2 - v^2}$ c) $\lg \frac{1}{a^2\sqrt{b}}$

d) 2 e) $\lg \frac{x^2}{(x-y)^3}$ f) $\lg \frac{x}{\sqrt{y}}$

2.2.3.4. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = 2$ c) $x = 1$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 3

3.2.1. a) $x = 4$ b) $x = -6$ c) $x = 11$

d) $x = 13$ e) $x = 2$ f) $x = 5$

g) $x = 4$ h) $x_1 = 12$; $x_2 = -2$

i) $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -7$ j) $x_1 = -8$; $x_2 = 2$

k) $x_1 = -1$; $x_2 = 5$

3.2.2. a) $x_1 = 7$, $x_2 = -9$ b) $x = \frac{3}{4}$ c) *keine reelle Lösung*

d) $x_1 = 4$, $x_2 = -10$ e) $x = 3$ f) *keine reelle Lösung*

3.2.3.1. a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = 4$ c) $x = 1{,}5$

d) $x = 4$ e) $x = 2$

3.2.3.2. a) $x = 7$ b) $x = 11$ c) $x = 2{,}14$

d) $x = 1{,}1358$ e) $x = 1$ f) $x_1 = \dfrac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0{,}6309,\ x_2 = 1$

3.2.3.3. a) $x = 2{,}5119$ b) $x = 1{,}0329$

c) $x_1 = 6{,}2361,\quad x_2 = 1{,}7639$ d) $x = 6$

e) $x = 5{,}026$ f) $x = 22{,}746$

3.2.4. a) $x_k = 0{,}4636 + k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

b) $x_k = \dfrac{\pi}{4} + 2\,k\pi;\quad x_k^{/} = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

c) $x_k = 4{,}3 + 2k\pi;\quad x_k^{/} = 1{,}98 + 2k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

d) $x_k = 2{,}52 + k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

e) $x_k = 0{,}9425 + k\pi,\quad x_k^{/} = 2{,}199 + k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

f) $x_k = 2{,}705 + k\pi;\quad x_k^{/} = 1{,}483 + k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

g) $x_k = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;\quad x_k^{/} = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

h) $x_k = 2k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

i) $x_k = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

j) $x_k = k\pi;\quad x_k^{/} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

k) $x_k = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 4k\pi;\quad x_k^{/} = (2k+1)\,\pi,\quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

l) $x_k = 2k\pi$; $x'_k = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

m) $x_k = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}$; $x'_k = k\pi$, $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

n) $x_k = k\pi$, $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

3.2.5. a) $i = \sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1$ $n = \dfrac{\lg \dfrac{K_n}{K_0}}{\lg(1+i)}$

b) $E = \dfrac{K_n}{q} \cdot \dfrac{q-1}{q^n - 1}$ $n = \dfrac{\lg\left(1 + \dfrac{K_n\,(q-1)}{E \cdot q}\right)}{\lg q}$

c) $v_0 = \dfrac{s}{t} + \dfrac{1}{2} gt$ $g = \dfrac{2v_0}{t} - \dfrac{2s}{t^2}$

d) $R = \dfrac{C R_1}{C + 4\pi K R_1}$ $R_1 = \dfrac{C R}{C - 4\pi K R}$

e) $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ $R_2 = \dfrac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3.2.6. a) $L = \left(-\infty, \dfrac{13}{60}\right)$ b) $L = [-11; -1]$

c) $L = \left(1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \infty\right)$

d) $L = (2, 6]$ e) $L = [-1, 3]$

f) $L = (-1, 1)$ g) $L = (-1, 0) \cup (0, 3)$

h) $L = \left[-\dfrac{1}{2}, \ 3\right]$ i) $L = (-1, \ 1)$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 4

4.2.1. a) $x_1 = -2, \quad x_2 = 4$ b) $x_1 = 10, \quad x_2 = 8$

c) $x = 14, \quad y = 10$ d) $x = 24, \quad y = 21$

e) $x_1 = \frac{a+b}{1+a}, \quad x_2 = \frac{a^2 - b}{1+a}$

f) $x_1 = 3a - 2b, \quad x_2 = 2a - 3b$

4.2.2. a) $x = 6{,}5, \quad y = 7{,}5, \quad z = 8{,}5$

b) $x_1 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{7}{4}, \quad x_3 = \frac{5}{4}$

4.2.3. a) $V = 47, \quad S = 11$

b) $F_1 = 0{,}27, \quad F_2 = 0{,}17$

c) $S_1 = 15m, \quad S_2 = 10m$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 5

5.2.1.1. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 15\}$

$G = \{2, 4, 6, \ldots, 14\}$

$U = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 15\}$

$A = \{1, 4, 9\}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$C = \{1, 7, 13\}$

5.2.1.2. $G \cup U = \Omega$, $\quad G \cap U = \varnothing$, $\quad G \cap A = \{4\}$

$A \setminus G = \{1, 9\}$, $\quad G \cap B = \{6, 12\}$

$U \setminus C = \{3, 5, 9, 11, 15\}$

$(C \setminus U) \cup A = A$

$(C \setminus U) \cap A = \varnothing$

$A \times C = \{(1,1)(1,7)(1,13)(4,1)(4,7)(4,13)(9,1)(9,7)(9,13)\}$

$C \times A = \{(1,1)(7,1)(13,1)(1,4)(7,4)(13,4)(1,9)(7,9)(13,9)\}$

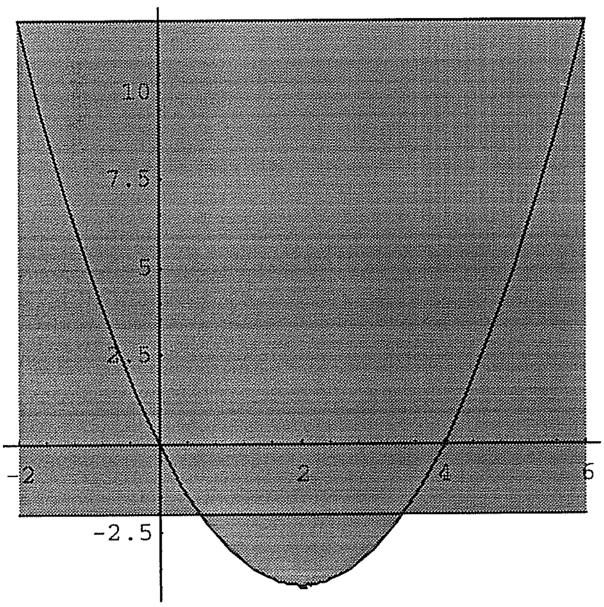
$\overline{A \cup B} = \{2, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

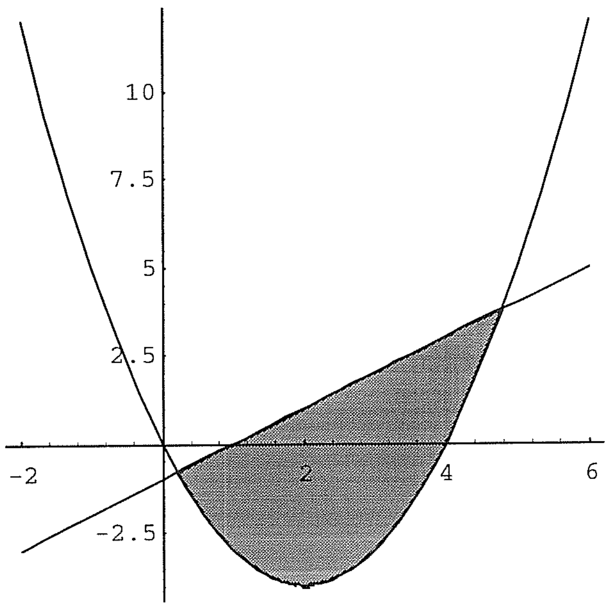
5.2.1.3. $A \cup B = [-4, 3]$, $\quad A \cap B = [-2, -1]$, $\quad A \setminus B = [-4, -2)$

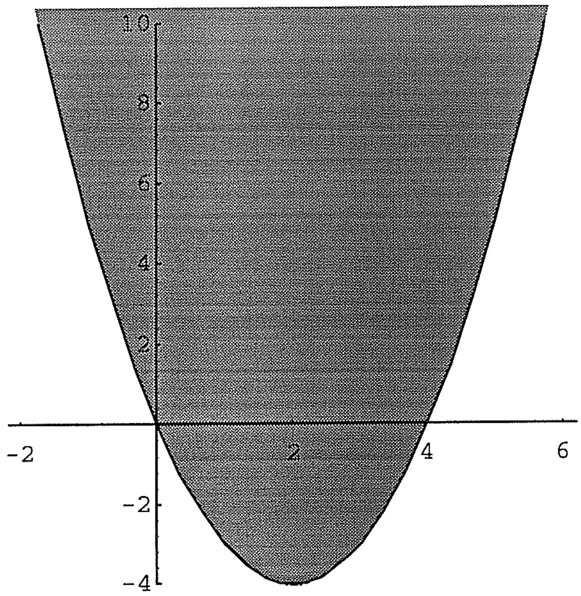
$B \setminus A = (-1, 3]$, $\quad B \cup D = [-2, 4)$, $\quad C \setminus B = \varnothing$

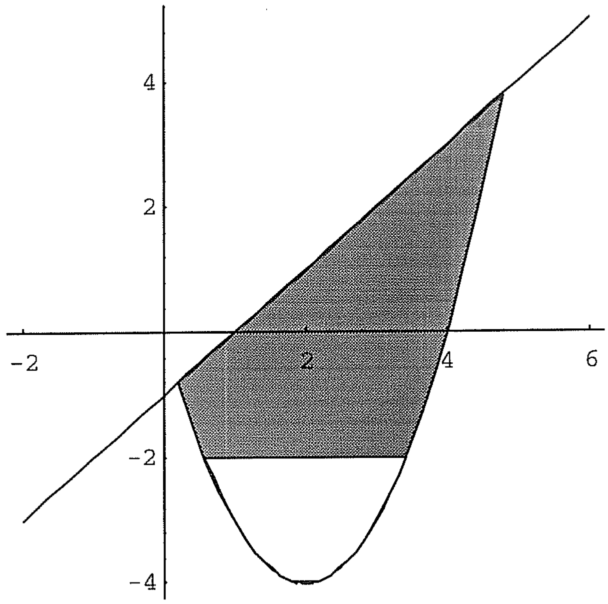
$C \cup D \cup E = (0, 4) \cup (4, \infty)$, $\quad D \cap E = \varnothing$

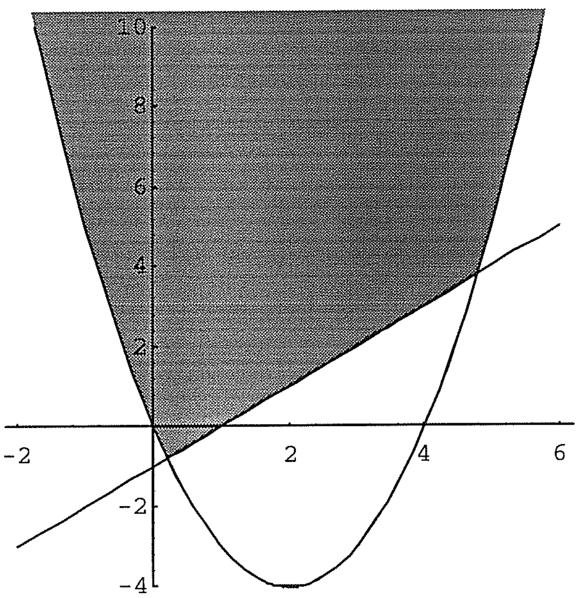
5.2.1.4.











5.2.1.5. a) 45 b) 112

5.2.2.1.

	D	*W*	*Umkehrfunktion*
a)	$\Re$	$\Re$	$f(x)=\dfrac{x-8}{3}$
b)	$\Re \setminus \{-3\}$	$\Re \setminus \{1\}$	$f(x)=\dfrac{3x+1}{1-x}$
c)	$\Re, \quad \lvert x\rvert \le 5$	$\Re, \quad 0 \le y \le 5$	$---$

	D	W	*Umkehrfunktion*
d)	$\Re$	$\Re, \quad y \geq 2$	– – –
e)	$\Re$	$\Re, \quad y > 1$	$f(x) = \ln \frac{1}{2}(x-1)$
f)	$\Re, \; x > \frac{3}{2}$	$\Re$	$f(x) = \frac{1}{2}\left(10^{\frac{x}{2}} + 3\right)$

5.2.2.2. a) gerade b) ungerade c) nicht symmetrisch

d) gerade e) gerade f) ungerade

5.2.2.3. a) auf D = $\Re$ für m > 0 streng monoton wachsend
für m < 0 streng monoton fallend

b) in (-∞, 0) und in (0,∞) streng monoton fallend

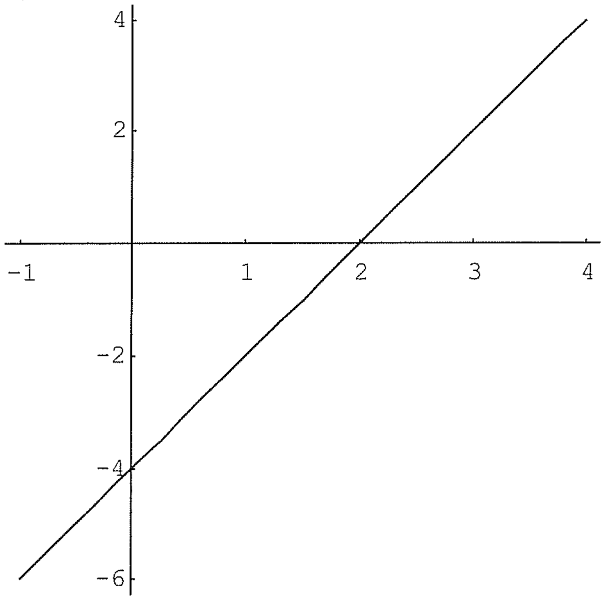
c) in [-1,∞] streng monoton wachsend
in (-∞, -1] streng monoton fallend

d) in (-∞, 0] streng monoton fallend
in [0, ∞) konstant

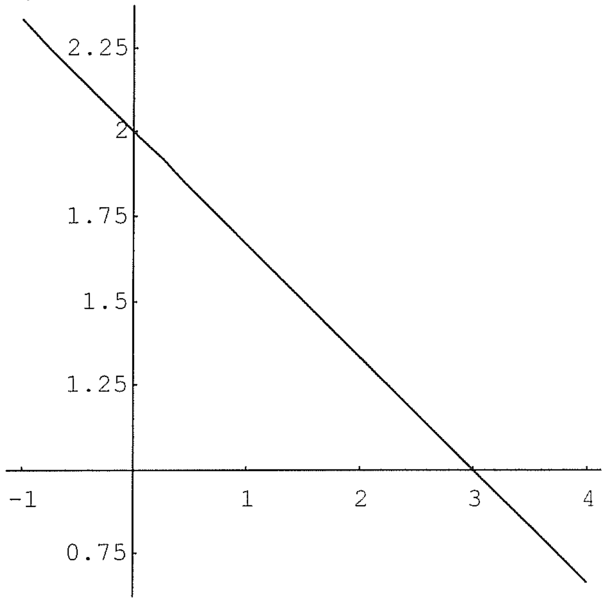
e) auf D = $\Re$ streng monoton fallend

5.2.2.4.

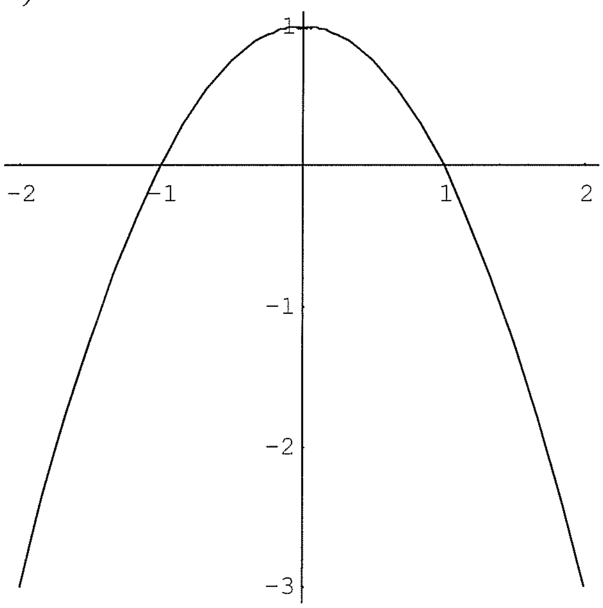
a)



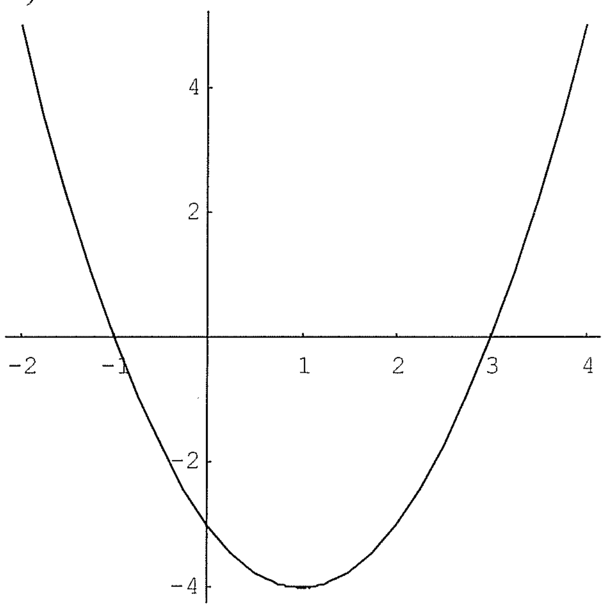
b)



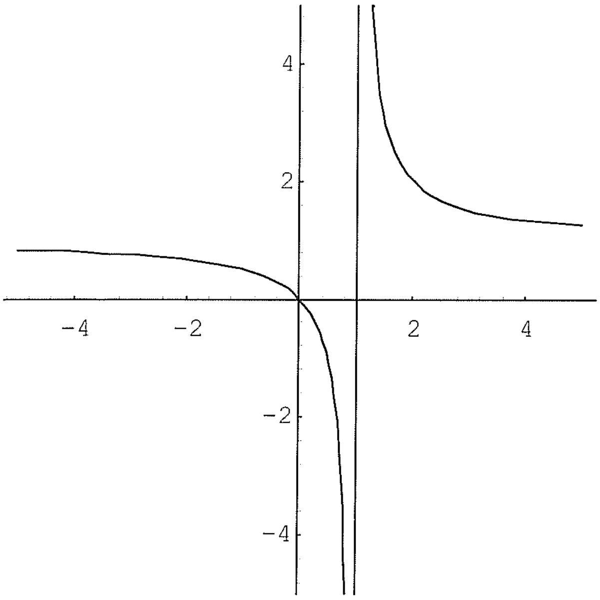
c)



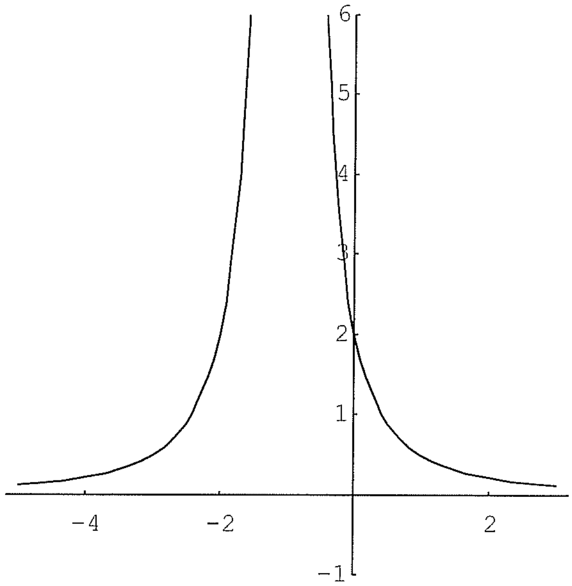
d)



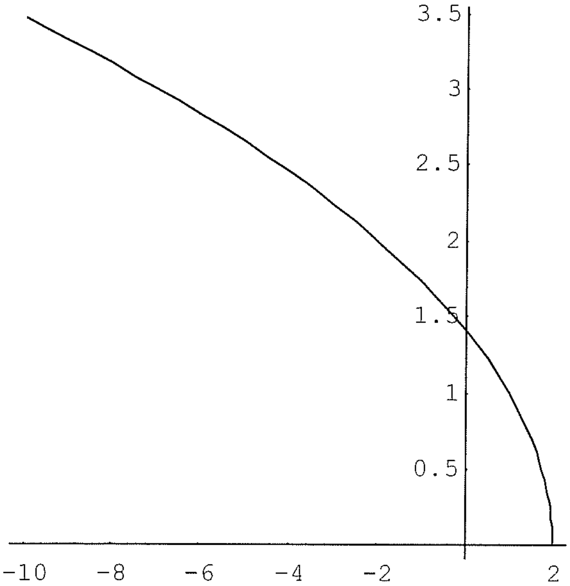
e)



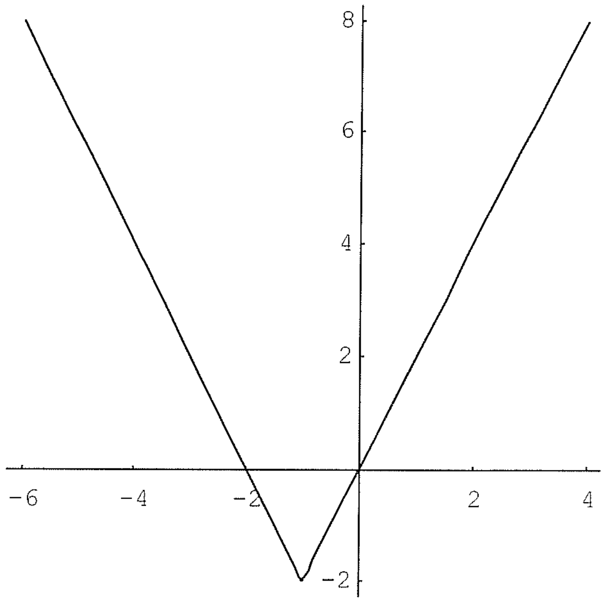
f)



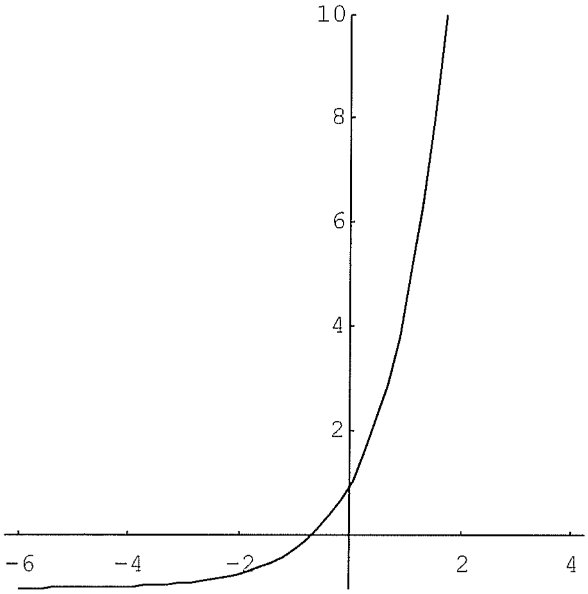
g)



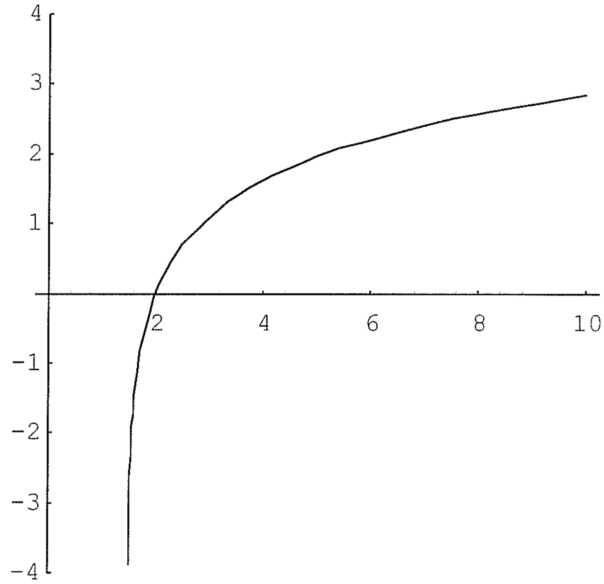
h)



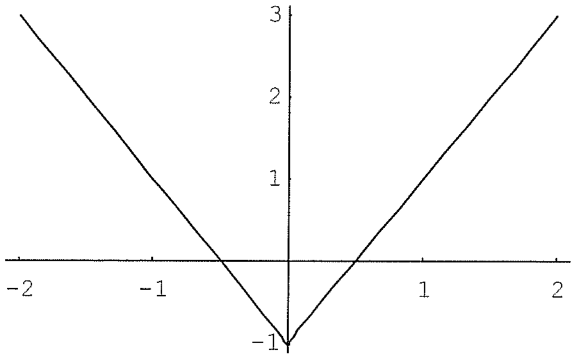
i)


10
8
6
4
2
-6 -4 -2 2 4

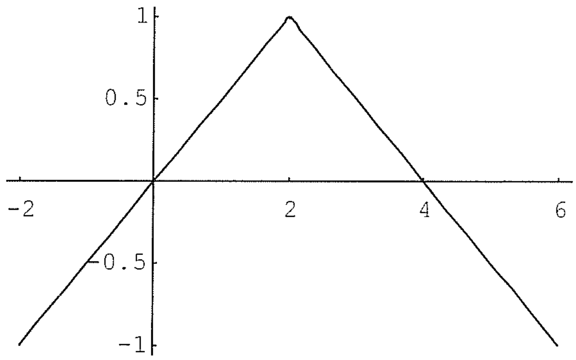
j)


4
3
2
1
2 4 6 8 10
-1
-2
-3
-4

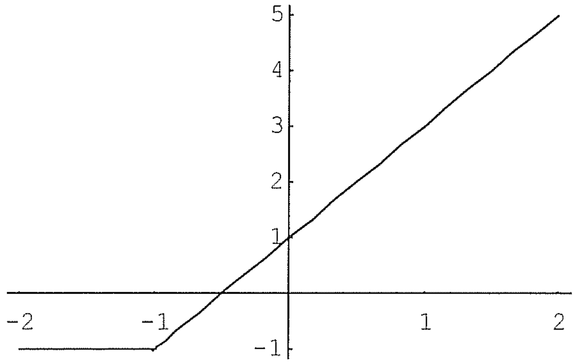
k)


3
2
1
-2 -1 1 2
-1

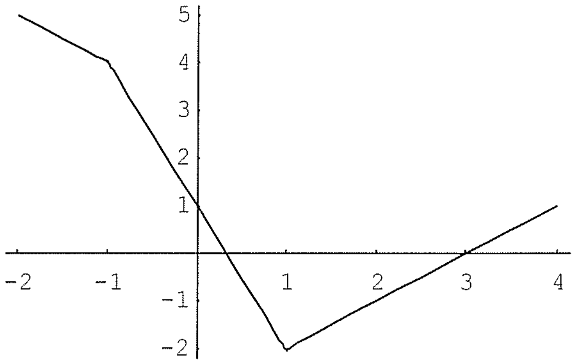
l)


1
0.5
-2 2 4 6
-0.5
-1

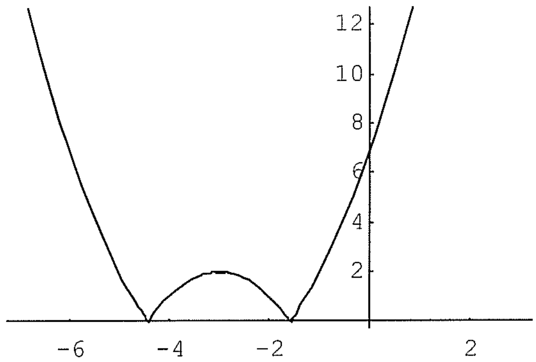
m)


5
4
3
2
1
-2 -1 1 2
-1

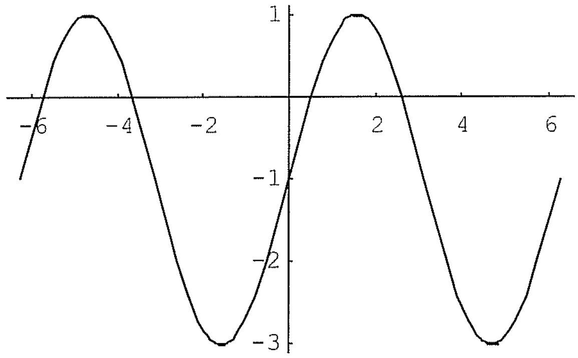
n)


5
4
3
2
1
-2 -1 1 2 3 4
-1
-2

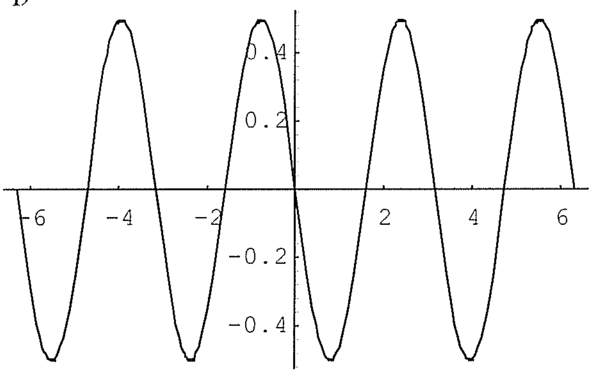
o)



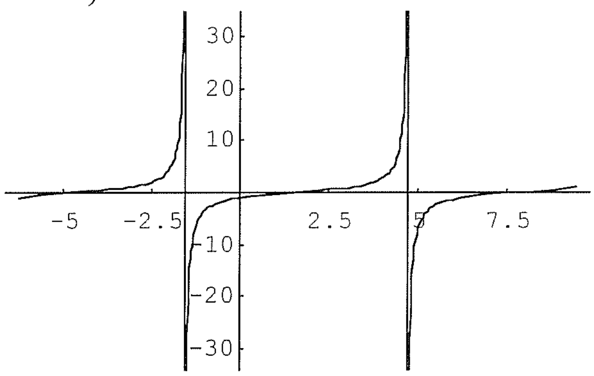
p)



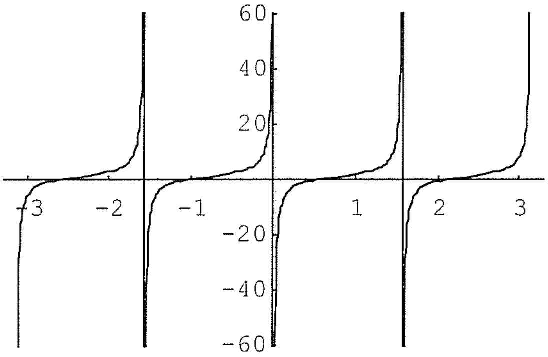
q)



r)



s)



5.2.2.5. a) 9 b) -6 c) $\dfrac{2}{3}$

d) $\mp\infty$ e) $-\infty$ f) -2

5.2.2.6. a) Lücke bei x = 2, Pol bei x = 1

b) keine Unstetigkeit

c) Sprung bei x = 0

d) Pol bei x = 2

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 6

6.2.1. a) $y = \frac{1}{2}x + 4$ b) $y = -\frac{7}{4}x + \frac{43}{4}$

c) $y = 6$ d) $x = 2$

6.2.2. a) $S\left(-\frac{7}{19}; \frac{37}{19}\right)$; $\sigma = 64,65°$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{97}{57}$

b) $S\left(\frac{16}{5}; \frac{17}{5}\right)$; $\sigma = 90°$; $y = -\frac{1}{2}x + 5$

c) $S\left(\frac{15}{13}; \frac{32}{13}\right)$; $\sigma = 74,93°$; $y = \frac{3}{4}x + \frac{83}{52}$

6.2.3. a) Abstand $d = 5$; $P(0;-2)$

b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

c) nein

6.2.4. a) $\vec{a}_1 = (2, \sqrt{5}, 4)^T$, $\vec{a}_2 = (2, -\sqrt{5}, 4)^T$, $\vec{b} = (-15, 20, 0)^T$

b) $\sphericalangle\left(\vec{e}_1, \vec{a}_{1,2}\right) = 66{,}42°$ $\sphericalangle\left(\vec{e}_2, \vec{a}_1\right) = 63{,}43°$

$\sphericalangle\left(\vec{e}_2, \vec{a}_2\right) = 116{,}56°$ $\sphericalangle\left(\vec{e}_3, \vec{a}_{1,2}\right) = 36{,}87°$

$\sphericalangle\left(\vec{e}_1, \vec{b}\right) = 126{,}87°$ $\sphericalangle\left(\vec{e}_2, \vec{b}\right) = 36{,}87°$ $\sphericalangle\left(\vec{e}_3, \vec{b}\right) = 90°$

c) $\vec{a}_1 \cdot \vec{b} = 14{,}72 \qquad \vec{a}_2 \cdot \vec{b} = -74{,}72$

d) $\sphericalangle\left(\vec{a}_1, \vec{b}\right) = 83{,}23° \quad \sphericalangle\left(\vec{a}_2, \vec{b}\right) = 126{,}71°$

6.2.5. a) $|\vec{a}| = \sqrt{6}\,; \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{10}\,; \quad |\vec{c}| = \sqrt{35}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = 5\,; \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0\,; \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0,$
$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (-15; -25; 5)^T; \quad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) = \vec{0}$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) = (-3, -5, 1)^T$
$\vec{b} \times \vec{c} = (15, -10, -5)^T; \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{0}$
$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (15, 25, -5)^T; \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 35$

d) $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = 35$

6.2.6. $P\begin{pmatrix} -1{,}9 \\ 6{,}9 \\ -3{,}8 \end{pmatrix}$

6.2.7. $A_{Parall.} = 33{,}18$

6.2.8. a) $\vec{x} = (-1, 3, 1)^T + t(0, 0, 1)^T \quad t \in \mathbb{R}$
b) $\vec{x} = (3, 2, 1)^T + t(2, 3, 1)^T \quad t \in \mathbb{R}$
c) $\vec{x} = (-1, 1, 2)^T + t(3, -2, -1)^T \quad t \in \mathbb{R}$
d) $\mathrm{R} \in g; \quad S \notin g$.

6.2.9 a) $\sigma = 22{,}83°$ b) $A = 24{,}5$

6.2.10. a) $P_0\begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix}$ b) $R\begin{pmatrix}14\\-2\\0\end{pmatrix}$ c) $S\begin{pmatrix}7\\-1\\5\end{pmatrix}$

d) $\sphericalangle\ QSP = 109{,}47°$ e) $a = -\dfrac{35}{3}$

6.2.11. a) $\vec{x} = (1,-1,2)^T + s(0,3,-5)^T + t(-3,1,2)^T \quad$ s, t $\in \mathbb{R}$
$11x + 15y + 9z - 14 = 0$

b) $\vec{x} = (2,-1,3)^T + s(-1,2,3)^T + t(2,-1,4)^T$
$11x + 10y - 3z - 3 = 0$

c) $\vec{x} = (-2,1,3)^T + s(1,1,0)^T + t(0,-4,1)^T$
$x - y - 4z + 15 = 0$

6.2.12.

	a)	b)	c)
I)	$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$	$\vec{c}$ ist linear unabhängig von $\vec{a}$ und $\vec{b}$	$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$
II)	$\alpha = 137{,}61°$	$\alpha = 22{,}21°$	$\alpha = 56{,}78°$

III) Vektorielle Darstellung

$\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x+1\\y-3\\z-1\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-2\\y+4\\z\end{pmatrix} = 0$

Parameterdarstellung $\vec{x} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}, \quad \alpha, \beta \in \Re$

allgemeine (parameterfreie) Darstellung

$2x - y + 5z = 0 \qquad x - 2y + z = 0 \qquad 2x + y + 4z = 0$

Zusatz wegen I b):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \\ z-9 \end{pmatrix} = 0$$

oder $\quad x - 2y + z - 2 = 0$

6.2.13. a) $\left|\overline{AB}\right| = c = \sqrt{56}\,;\quad \left|\overline{AC}\right| = b = \left|\overline{BC}\right| = a = \sqrt{52}\,;\quad \alpha = \beta = 58{,}74°$

b) nein

c) Ebene E: $-24x + 16y + 36z - 88 = 0\,;\quad D \notin E$

6.2.14. $V_{Tetraeder} = \frac{2}{3}$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 7

7.2.1. a) $a_3 = 4\,,\quad a_7 = \frac{32}{13}$ b) kein Glied

c) monoton fallend d) $g = \frac{3}{2}$

7.2.2. a) $a_1 = \frac{196}{3}\,,\quad d = -\frac{14}{3}$

b) *rekursiv:* $a_{n+1} = a_n - \frac{14}{3} \quad a_1 = \frac{196}{3}$

explizit: $a_n = \frac{210 - 14n}{3} \qquad n = 1, 2, 3 \,.....$

c) $s_{12} = 476$

7.2.3. a) 360 b) 12

7.2.4. a) $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{4}$, $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

b) 9 c) 2,67 d) $\frac{8}{3}$

7.2.5. a) 0 b) $-\infty$ c) $\frac{11}{4}$

d) 3 e) e^3 f) e^3

Lösungen der Aufgaben zum Kapitel 8

8.2.1.

a) $f'(x) = x^2 - 6x + 2$ b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = -\frac{4}{x^3} + 3e^x - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ d) $f'(x) = \frac{3}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{16}{3}x^4\sqrt[3]{x}$

e) $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}}$ f) $f'(x) = (x+1)e^x$

g) $f'(x) = \ln x + 1 + xe^x\,(2 + x)$ h) $f'(x) = \frac{1}{2}e^x\left(1 + 13x + 6x^2\right)$

i) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ j) $f'(x) = -\frac{4x^4 + 6x^2 + 2x}{(x^3 - 1)^3}$

k) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$ l) $f'(x) = 28x\left(2x^2 - 4\right)^6$

m) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ n) $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)$

o) $f'(x) = -2e^{-2x} - \frac{2}{2x - 5}$ p) $f'(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 2$

q) $f'(x) = -4 \cdot \frac{x+1}{(x-1)^3}$

r) $f'(x) = x^2 e^{3x}(3\ln(x^2) + 3x\ln(x^2) + 2)$

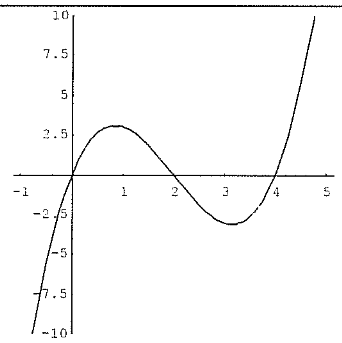
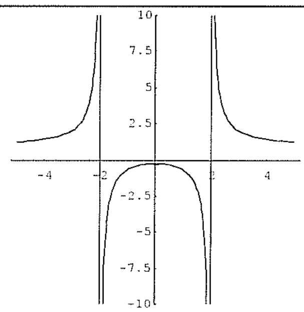
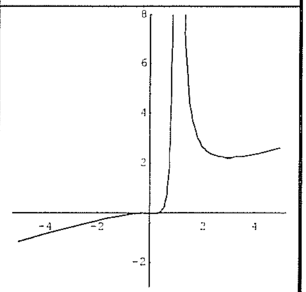
s) $f'(x) = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$ t) $f'(x) = \frac{-6x}{\sin^2(3x^2)} + \frac{2}{1 + 4x^2}$

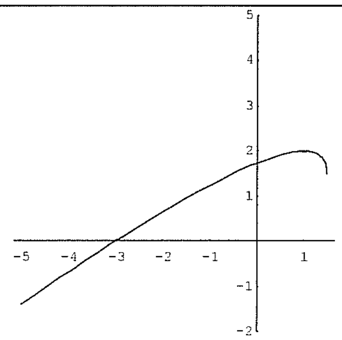
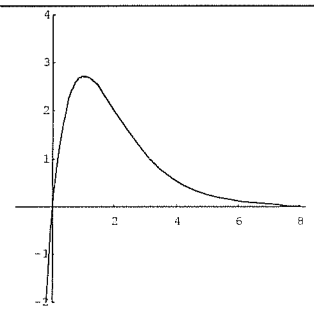
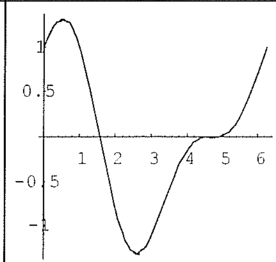
8.2.2. steigend für $|x| < 1$
fallend für $|x| > 1$,
waagerecht für $x = \pm 1$

8.2.3. $P_1\left(\sqrt{3}\,;0\right)$, $P_2\left(-\sqrt{3}\,;0\right)$

8.2.4. $f(x) = \frac{7}{4}x + \frac{27}{4}$

8.2.5.

	a)	b)	c)
Db	$\Re$	$\Re \setminus \{2\,;-2\}$	$\Re \setminus \{1\}$
Schnittpunkt mit x-Achse mit y-Achse	$N_1(0{,}0)\,;N_2(2{,}0)$ $N_3(4{,}0)$ $P(0{,}0)$	keine $P\left(0,-\frac{1}{4}\right)$	$N(0{,}0)$ $P(0{,}0)$
Unstetigkeits-stellen	keine	$x_1=2$ *Polstelle* $x_2=-2$ *Polstelle*	$x=1$ *Polstelle*
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$
Asymptoden	keine	$y_A=1$	$y_A=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
Symmetrie	keine	gerade Funktion	keine
lokale Extrempunkte	$H\left(2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ $T\left(2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;-\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$	$H\left(0\,;-\frac{1}{4}\right)$	$T\left(3\,;\frac{9}{4}\right)$
Wendepunkte	$W(2{,}0)$	keine	$W(0{,}0)$
Graph			
	d)	**e)**	**f)**
Db	$\Re, x\le 1{,}5$	$\Re$	$\Re,\ 0\le x\le 2\pi$
Schnittpunkt mit x-Achse mit y-Achse	$N(-3{,}0)$ $P(0;\sqrt{3})$	$N(0{,}0)$ $P(0{,}0)$	$N_1(1{,}57;0)$ $N_2(4{,}71;0)$ $P(0{,}1)$
Unstetigkeits-stellen	keine	keine	keine
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	entfällt

		$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	
Asymptoten	-	-	entfällt
Symmetrie	keine	keine	keine
lokale Extrempunkte	$H(1{,}2)$	$H(1, e)$	$H(0{,}52;1{,}30)$ $T(2{,}62;-1{,}30)$
Wendepunkte	keine	$W(2;2)$	$W_1(1{,}57;0)$ $W_2(3{,}39;-0{,}73)$ $W_3(4{,}71;0)$ $W_4(6{,}03;0{,}73)$
Graph			

8.2.6. a) 1. $P = f(x,y) = x \cdot y \qquad x,y,n > 0\,;\, x,y,n \in Z$

$$x_E = \frac{n}{2},\quad y_E = \frac{n}{2},\quad P_{Max} = \frac{n^2}{4}$$

2. $S = f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad x,y,n > 0\,;\, x,y,n \in Z$

$$x_E = \frac{n}{2},\ y_E = \frac{n}{2},\ S_{Min} = \frac{n^2}{2}$$

b) $x_E \approx 1{,}18,\quad V_{Max} = 28{,}52$

c) r Radius, h Höhe des Zylinders

$$r_E = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\qquad h_E = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

d) $x_E = \frac{2}{3}d,\quad y_E = \frac{1}{3}h,\quad V_{Max} = \frac{1}{27}\pi d^2 h$

Lösungen der Aufgaben zum Abschnitt 9

9.2.1.

a) $\frac{x^5}{5} - \frac{7x^2}{2} + 8x + C$ b) $\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\frac{12}{7}\sqrt[3]{x^7} + C$ d) $\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C$

e) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - 6\sqrt{x} + C$ f) $\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{x}\right) + C$

g) $\frac{2}{3}\sqrt{a^3 x} + C$ h) $\frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}} + C$

i) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x^2} + C$ j) $\frac{1}{3}e^x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$

k) $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$ l) $\tan x + \cot x + C$

9.2.2.

a) $\frac{68}{3}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 7,5754

d) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ e) 11,64 f) 221,67

9.2.3.

a) 57 b) $-\frac{1}{8}\sqrt[3]{(5-6x)^4} + C$

c) 268,28 d) 0,861

e) 1,27 f) $3\ln|2x+1| + C$

g) $-\frac{e^{-wx}}{w} + C$ h) $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$

9.2.4.

a) 288 b) 21,08 c) 18

d) 8 e) $\frac{27}{32}$

9.2.5. $x_1 = \ln 1{,}57276 \approx 0{,}45$

9.2.6.

a) $7{,}5\,\pi$ b) $12\,\pi$ c) 142,17

d) $18\,\pi$ e) 33,5