Praktikum
Nachbarschaften

Wir übertragen die Überlegungen zu den Nachbarschaften von Pixeln aus der Vorlesung auf den 3D-Raum. Zur Erinnerung: Hier sprechen wir nicht von Pixeln sondern von Voxeln.

a) Auf welche drei Arten können benachbarte Voxel im 3D-Raum zusammenhängen?

b) Wie viele Nachbarn hat ein Voxel bei jeder dieser drei Nachbarschaften?

c) Eine Nachbarschaftsart hat offensichtlich immer die wenigsten Nachbarn. Wie viele Nachbarn hat ein Voxel im 4D-Raum mindestens?

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Wie viele Nachbarn hat ein Voxel bei jeder dieser drei Nachbarschaften?

Voxeln können mindestens
- einen gemeinsamen Punkt,
- eine gemeinsame Linie oder
- eine gemeinsame Fläche

besitzen.

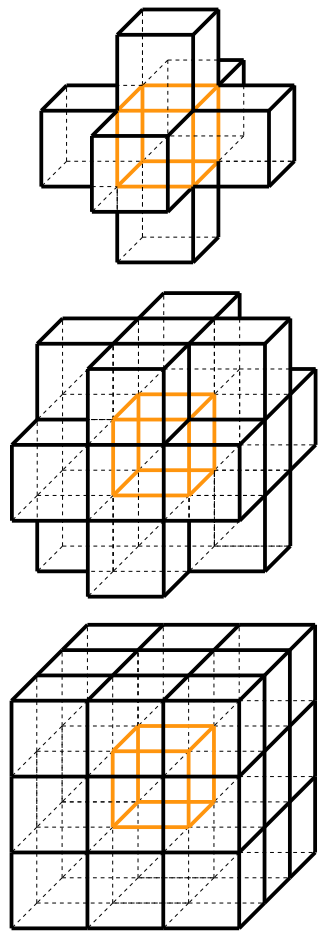
Lösung
Nachbarschaften

Wie viele Nachbarn hat ein Voxel bei jeder dieser drei Nachbarschaften?

Mindestens eine gemeinsame Fläche: 6 Nachbarn

Mindestens eine gemeinsame Linie: 6+12=18 Nachbarn

Mindestens einen gemeinsamen Punkt: 6+12+8=26 Nachbarn



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

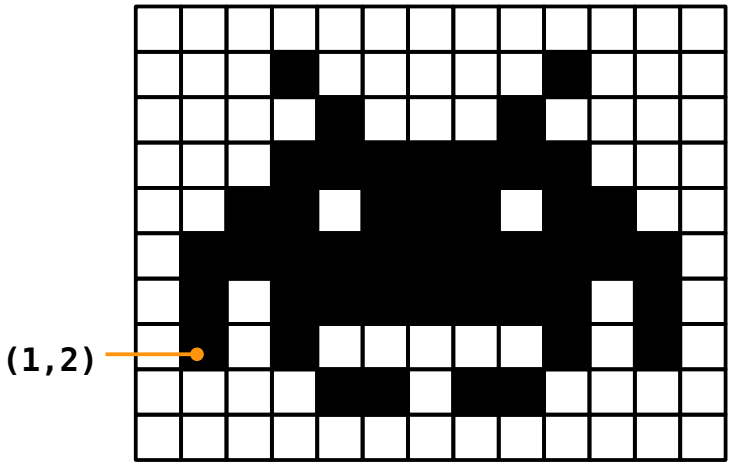
Wie viele Nachbarn in 4D?

Je Achse 2, also 2 x 4 = 8 Nachbarn in 4D (analog in 3D je Achse 2, also 6 Nachbarn).

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Freeman Kurve

a) Kodieren Sie die schwarzen Pixel der folgenden Grafik als (möglichst kurze) digitale Kurve nach dem Freeman-Kettencode. Wir gehen (implizit) davon aus, dass die Kurve bei Pixel (1,2) startet.



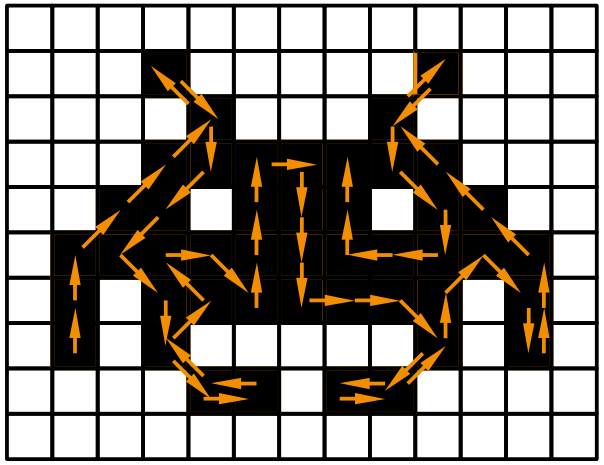
Zur Erinnerung:

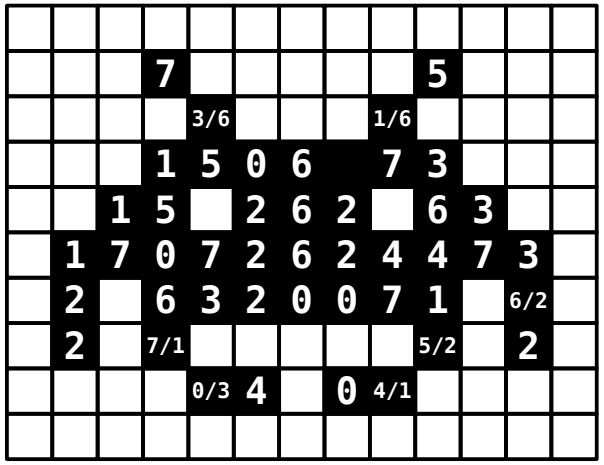
```
3 2 1
4   0
5 6 7
```


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung

Freeman Kurve





2211 1376 5576 7043 1307 2220 6660 0754 0121 7622 3331 5676 4422

Bemerkung: Noch kürzere Lösungen sind möglich wenn es gelingt die Kurve in einem „Fühler“ oder „Arm“ der Figur enden zu lassen.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Freeman Kurve

b) Man kann eine Kurve um 90 Grad im Uhrzeigersinn drehen und sie, ausgehend vom gleichen Punkt auf der Kurve, wie vorher, noch einmal kodieren. Das ist aber unnötig, denn die Zahlen des Kettencodes verändern sich ganz vorhersehbar. Wie genau verändern sich die Zahlen des Kettencodes durch die 90 Grad Drehung?

c) Ein Programmierer soll ein Programm schreiben das ermittelt, ob eine digitale Kurve (wie oben verwendet) offen oder geschlossen ist. Er kann zwar programmieren, versteht aber nichts von Bildverarbeitung. Beschreiben Sie für den Programmierer ein Verfahren, das diese Aufgabe löst und das leicht in eine Programmiersprache umgesetzt werden kann. Alternativ können Sie auch am Beispiel zeigen, wie Ihr Algorithmus funktioniert.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

b) Wie genau verändern sich die Zahlen des Kettencodes durch die 90 Grad Drehung?

Lösung:

0 => 6
1 => 7
2 => 0
3 => 1
4 => 2
5 => 3
6 => 4
7 => 5

(Am besten am Beispiel ausprobieren)

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

c) Algorithmischer Test: Kurve offen/geschlossen

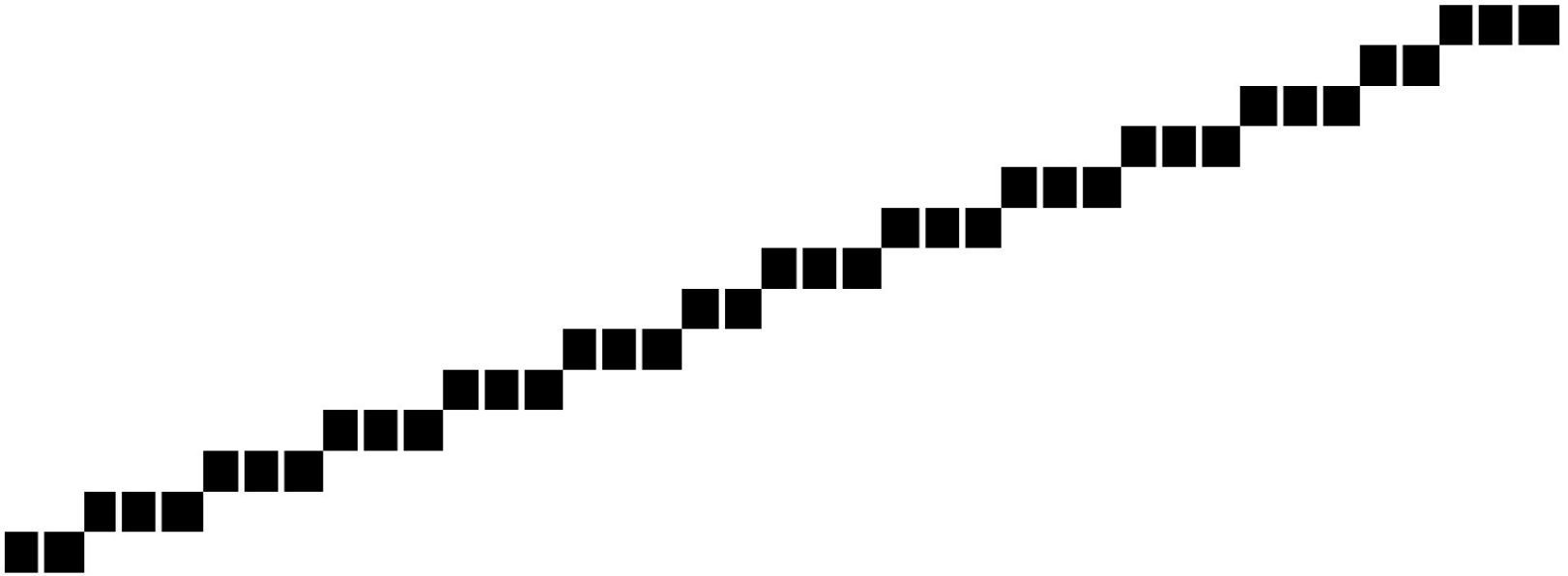
Lösung:

Wir nutzen zwei Zähler, einen für die X-Achse, einen für die Y-Achse, z.B. cx und cy. Beide initialisieren wir mit 0. Für jeden Freemax Code zählen wir cx und/oder cy weiter. Code 0 bedeutet z.B. einen Schritt nach rechts, also cx = cx + 1. Code 3 bedeutet einen Schritt nach links und einen nach oben, also cx = cx – 1 und cy = cy +1. Die Kurve ist genau dann geschlossen, wenn beide Zähler am Ende wieder auf 0 stehen. (Will man den ersten Pixel nicht nochmal betreten, dann dürfen beide Zähler auch betragsmäßig <= 1 sein.) Da dies nicht genau festgelegt war, sind beide Lösungen denkbar.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Liniennachweis

a) Testen Sie, ob die folgende Kurve eine Linie ist und begründen Sie Ihre Einschätzung.



Lösung
Liniennachweis

a) Testen Sie, ob die folgende Kurve eine Linie ist und begründen Sie Ihre Einschätzung.

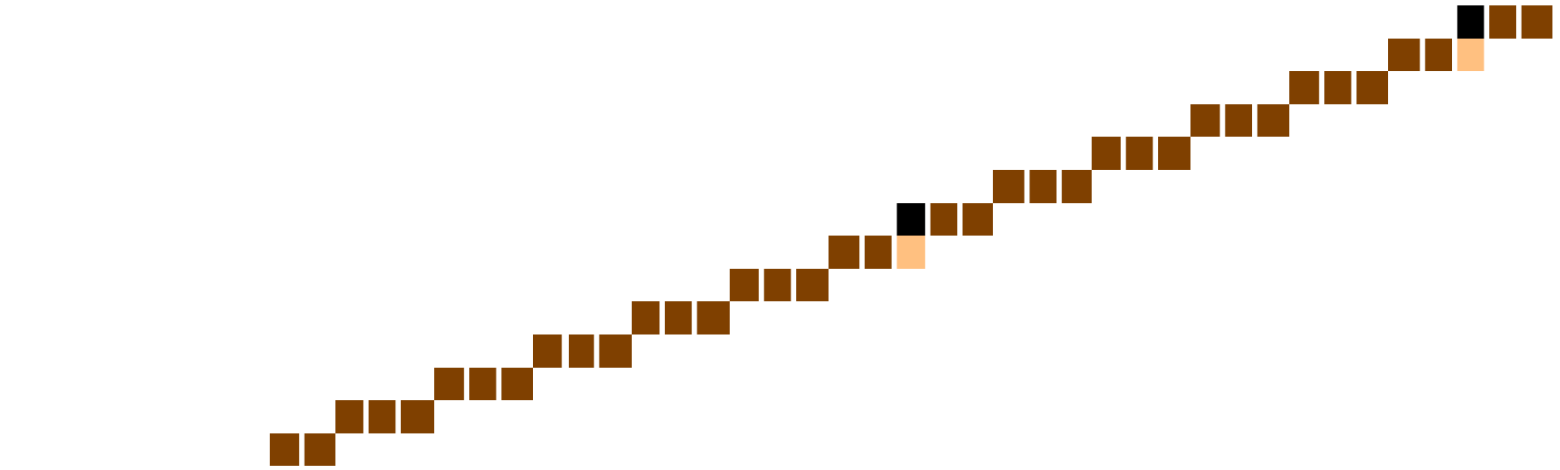


Es gibt nur zwei Elemente, eines davon ist singulär. Jedoch sind die Elemente nicht benachbart. Die Kurve ist daher keine (perfekte) Linie (siehe nächste Seite).
Allerdings ist sie zusammen mit den Ausnahmen auf der 2. Seite (siehe Folien der Vorlesung) doch korrekt. Mit der Begründung, es könnte sich um eine abgeschnittene Linie handeln wäre auch richtig die Linie für perfekt zu halten.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung
Liniennachweis

Mit einer kleinen Korrektur wäre die Linie perfekt:



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Liniennachweis

b) Erzeugen Sie eine Linie als Freeman-Code, die frühestens nach der 3. Iteration scheitert.

   Hinweis: Mit 3. Iteration ist gemeint: Linie als Freeman-Code aufschreiben (1. Iteration), singuläre Elemente streichen und Zusammenfassen (2. Iteration), nochmal singuläre Elemente streichen und zusammenfassen (3. Iteration).

c) Zeichnen Sie Ihre Linie als Pixel. Erläutern Sie auf Grundlage der Zeichnung was an der Linie nicht perfekt ist und wie man sie korrigieren kann.

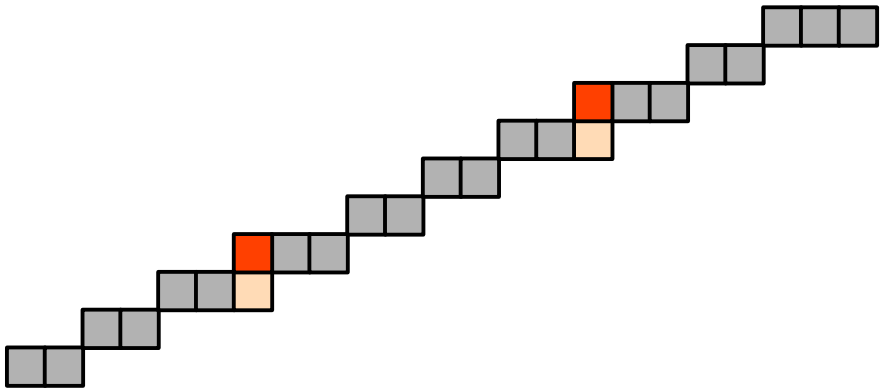
Lösung
Liniennachweis

b) - c) Erzeugen Sie eine Linie als Freeman-Code, die frühestens nach der 3. Iteration scheitert.

Lösung:
Zu Erzeugen einer Linie die nach der 3. Iteration abbricht, könnte man mit der letzten fehlgeschlagenen Iteration anfangen und diese zur jeweils vorherigen Stufe erweitern:

```
      3                   3                   1
  1   1   1       2     1   1   1       2       1     2

0 1 0 1 0 1 00 1 0 1 0 1 0 1  00  1   0  1 00
```



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Time-Warping

Alice möchte sich mit Bob in Mittweida treffen. Sie kommt aus Rochlitz, westlich von Mittweida, er aus Hainichen das weiter östlich liegt. Um die Trennung während der Anreise erträglicher zu machen, wollen beide wenigsten möglichst auf Augenhöhe reisen. Dafür wollen Alice und Bob ihre Reisegeschwindigkeit so anpassen, dass die Differenzen Ihrer Höhen insgesamt minimal werden. Die Höhen auf dem Weg nach Mittweida seien die folgenden:

Alice: 7 6 7 1 0 3 2 1 1 2 1

Bob : 6 6 5 4 4 3 2

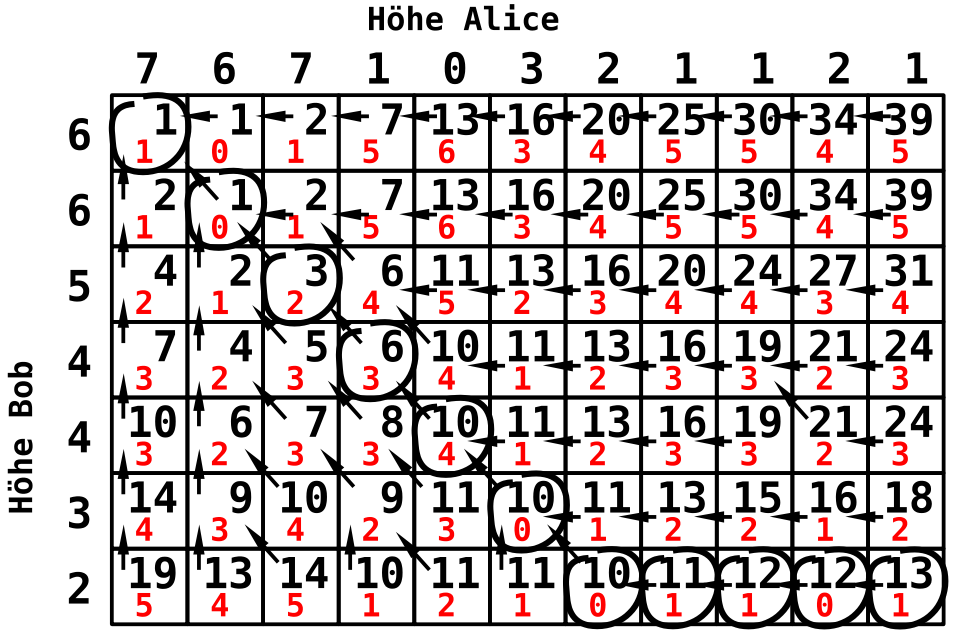
Sie können die Matrix dafür nutzen für beide die optimale Reisegeschwindigkeit zu ermitteln, d.h. wer den jeweils nächsten Schritt macht (auchbeide gleichzeitig ist möglich).

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung
Time-Warping

Alice: 7 6 7 1 0 3 2 1 1 2 1

Bob : 6 6 5 4 4 3 2

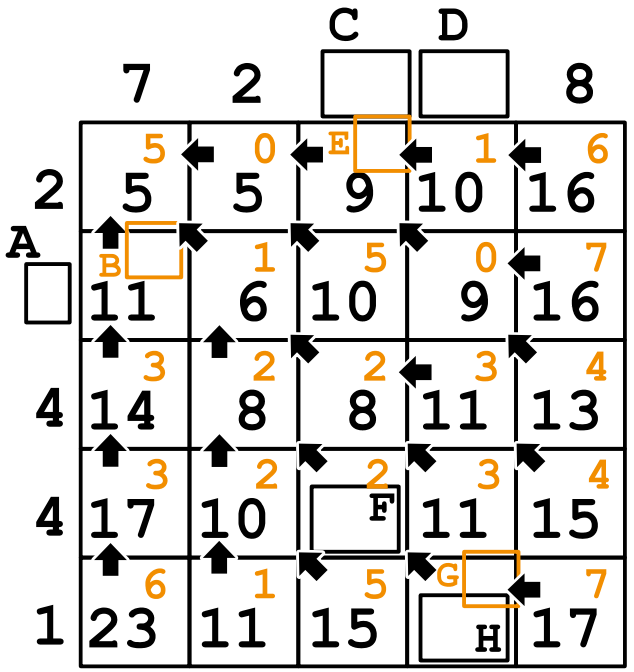


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum

Time-Warping

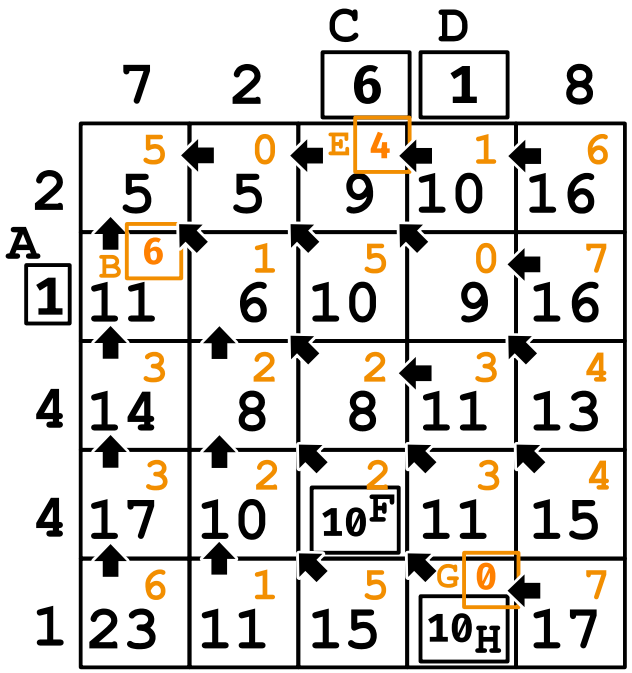
Finden Sie sinnvolle Werte für Kästchen A-H:



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung
Time-Warping

Finden Sie sinnvolle Werte für Kästchen A-H:



Erläuterung:

Die 11 im gleichen Feld wie Kästchen B soll aus der 5 darüber plus B entstehen. Demnach muss B=6 sein.

B=6 soll aus dem Unterschied zwischen 7 (erste Spalte ganz oben) und A entstanden sein. Das gilt sowohl für A=1 wie A=13. Aus dem Vergleich z.B. mit der 8 aus der letzten Spalte lässt sich schließen, dass nur A=1 die Lösung sein kann.

Mit dem nun bestimmten A kann auch leicht auf C=6 und D=1 geschlossen werden. Wegen D=1 gilt auch gleich G=0.

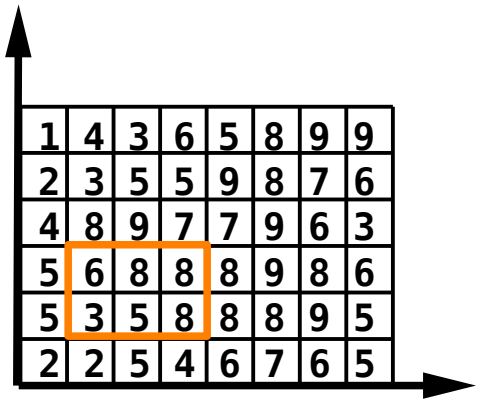
F=10 ergibt sich aus der 8 (Kästchen links oben davon) plus der lokalen 2 und da G=0 ist, kann H auch nur 10 sein.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Gradient

Praktikum
Gradient

a) Berechnen Sie für jeden Pixel im orange umrandeten Bereich den Betrag des Gradienten:
b) Der Gradient (als Vektor) zeigt lt. Vorlesung in die Richtung der größten Grauwert-veränderung. Wir würden gerne wissen, in welche Richtung sich die Grauwerte im Bild am wenigsten verändern. Berechnen Sie dies exemplarisch für einen der Pixel.



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

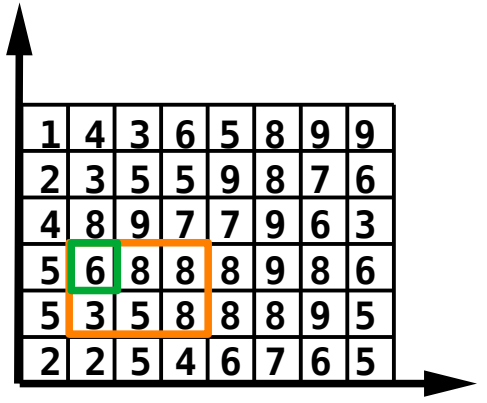
Gradient

a) Gradienten im organgenen Feld

Das Bild muss in X- bzw. Y-Richtung abgeleitet werden. Dafür berechnen wir komponentenweise den Differenzenquotient (am Beispiel des grün umrandeten Pixels):

$$\left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8-5\\8-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1.5\\2.5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1.5^2+2.5^2} = \sqrt{8.5} \approx 2.9$$

Da wir für die Berechnung der Differenz jeweils einen Schritt nach links (x-1) und einen nach rechts (x+1) gemacht haben, kommt die Differenz auf der Strecke (x+1)-(x-1) = 2 zustande. Daher die Teilung durch 2. Für die restlichen Pixel ergeben sich die folgenden Gradienten (links nach rechts, oben nach unten):



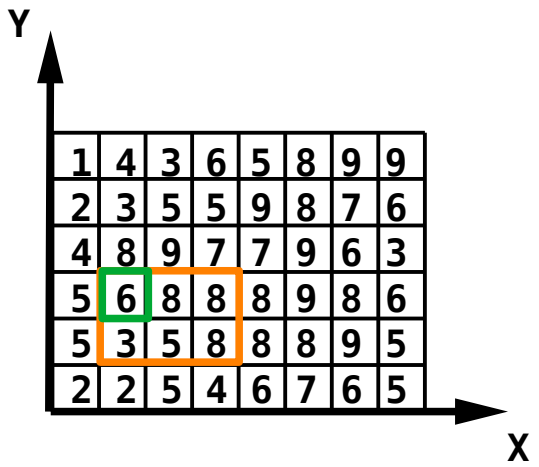
© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Gradient

a) Gradienten im organgenen Feld

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5} \approx 2.2 \quad \left\|\begin{pmatrix}0\\-0.5\end{pmatrix}\right\| = 0.5 \quad \left\|\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\| = 2 \quad \left\|\begin{pmatrix}2.5\\1.5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(8.5)} \approx 2.9 \quad \left\|\begin{pmatrix}1.5\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6.25} = 2.5$$

Bemerkung: Der Gradient muss nicht anhand des rechten und linken Nachbarn berechnet werden. Man kann ihn auch in einer weiteren Nachbarschaft berechnen und/oder ein gewichtetes Mittel über einen größeren Bereich berechnen.

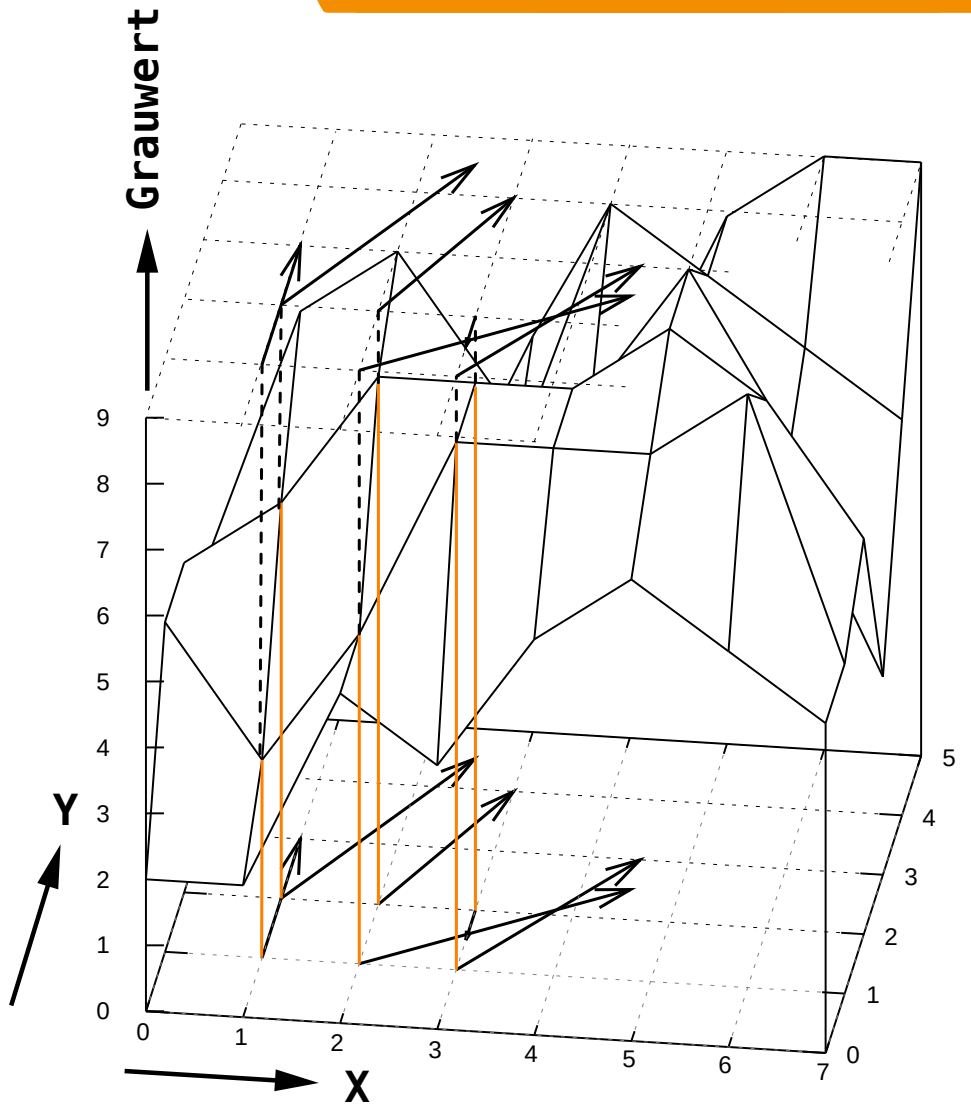


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Gradient

a) Gradienten im organgenen Feld

Als Vektoren in das Grauwertgebirge eingezeichnet, sehen die Lösungs-vektoren wie hier dargestellt aus. Beachten Sie, dass der Gradient nur in 2D definiert ist (wg. Ableitung nach x und y). Die 2D Vektoren sind in der x/y-Ebene eingezeichnet und zur besseren Veranschaulichung nochmal in der Höhe 9.



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

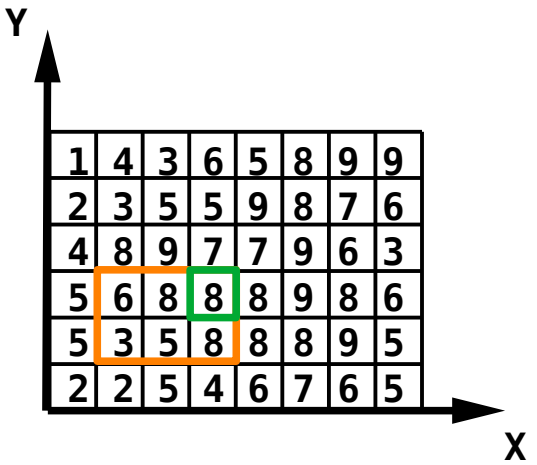
Gradient

b) Richtung geringster Änderung

Wenn der Gradient die Richtung der max. Steigung angibt, dann bewegt man sich im „Grauwertgebirge“ senkrecht dazu auf der gleichen Höhe. Es reicht also für den Gradienten das Lot zu berechnen. Zur Erinnerung:

Das Lot zu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist in 2D definiert durch $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

Bezogen auf den grünen Pixel wäre die Richtung der geringsten Grauwertveränderung also $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

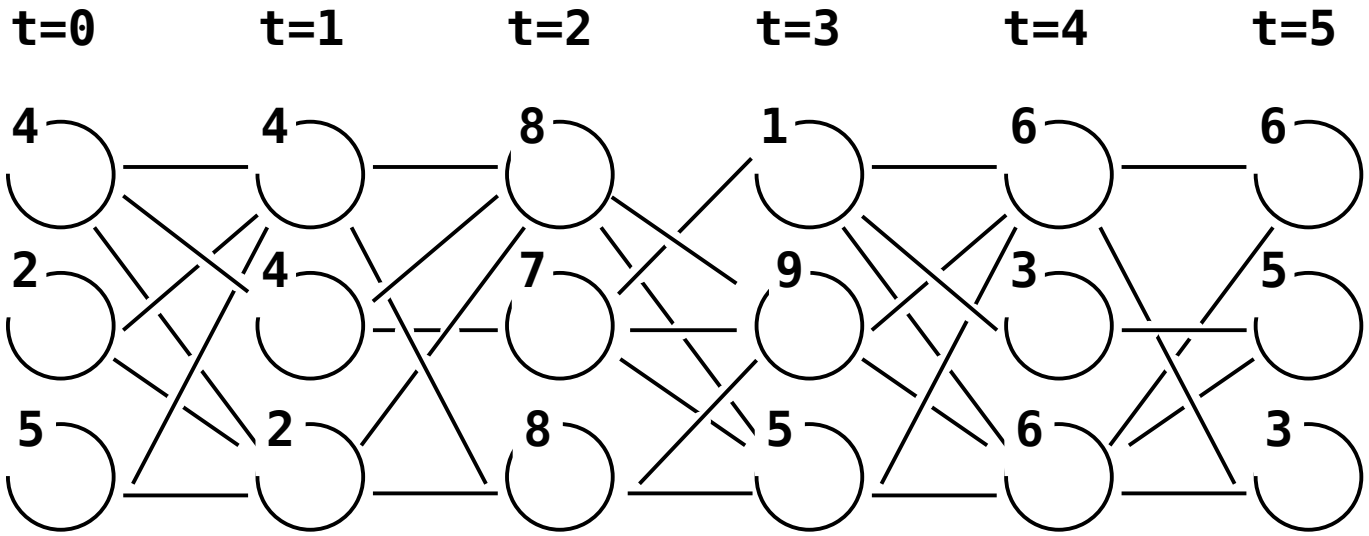


Eingezeichnet in das Bild bewegt man sich entlang dieses Vektors tatsächlich auf einer ähnlichen Höhe.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

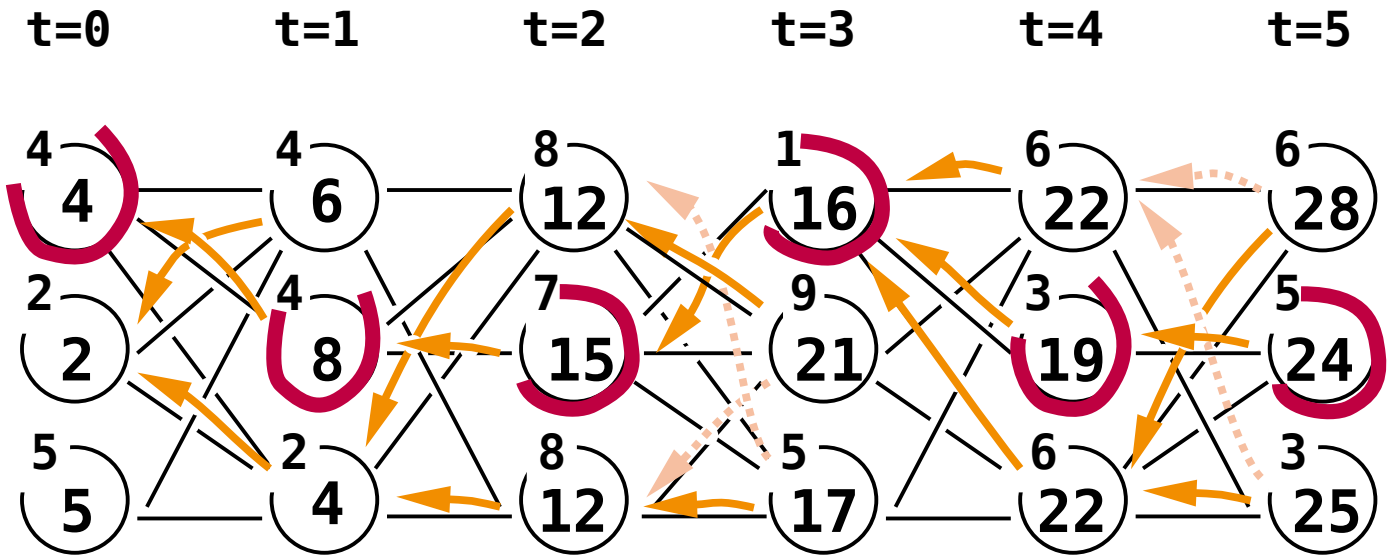
Praktikum
Dyn. Programmierung

Zu 6 Zeitpunkten können jeweils 3 Entscheidungen getroffen werden. Deren einzelne Kosten sind an den jeweiligen Knoten vermerkt.
Welches ist der kostenminimale Pfad von t=0 nach t=5 und die hoch sind die minimalen Kosten?



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung
Dyn. Programmierung



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Dyn. Prog. Anwendung

Drogen sollen von Honduras nach Frankreich, Deutschland oder Dänemark gebracht werden. Es ist bekannt, dass Drogenkartelle ihre Gewinn maximieren wollen. Entsprechend ist die wahrscheinlichste Route die mit den geringsten Kosten. Sie haben die Aufgabe die wahrscheinlichste Route zu ermitteln, damit die Drogen abgefangen werden können.

Ausgehend von Honduras gibt es vier typische nächste Ziele, darunter Kanada und die USA. Beide müssen mit teuren halbtauchenden U-Booten angelaufen werden, die nur einmal Verwendung finden. Die Fahrt nach Kanada kostet 200 Geldeinheiten (GE), die in die USA 150GE.

Billiger geht es mit dem Fischerboot nach Kuba (40GE) oder Mexiko (30GE).

Im zweiten Teil der Reise können nur England oder Portugal angelaufen werden. Aufgrund der vielen Handelsverbindungen zwischen Kanada nach England lassen sich die Drogen leicht auf Riesentankern verstecken. Das geringe Entdeckungsrisiko bringt den Verbindungsmännern auf den Schiffen nur 20GE ein. Kanada -> Portugal kostet 60GE. Ausgehend von den USA kennt das Drogenkartell nur Verbindungen nach England für 90GE.

Von Mexiko aus kennt das Kartell nur eine Route nach Portugal. Manchmal gelingt es rivalisierenden Banden die Ware abzufangen und über eigene Kanäle zu verkaufen. Der kartelleigene Mathematiker hat daher berechnet, dass die Selbstversicherung der Ware inkl. Transport 200GE kostet.
Die Lage im kommunistischen Kuba ist für Drogentransporte kritisch. Die Verschiffung nach England kostet daher 200GE, die nach Portugal 220GE.
Ausgehend von England hat das Kartell einen Vertriebsweg nach Frankreich (40GE) und Dänemark (30 GE). Ausgehend von Portugal kann Deutschland für 70GE und Dänemark für 30GE beliefert werden.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Dyn. Prog. Anwendung

Die Gemengelage scheint unübersichtlich, die Interpretation der Optimierungsaufgabe ist jedoch eine einfache Anwendung der Dynamischen Programmierung.

a) Was kostet der Transport für das Zielland Frankreich, Dänemark und Deutschland?

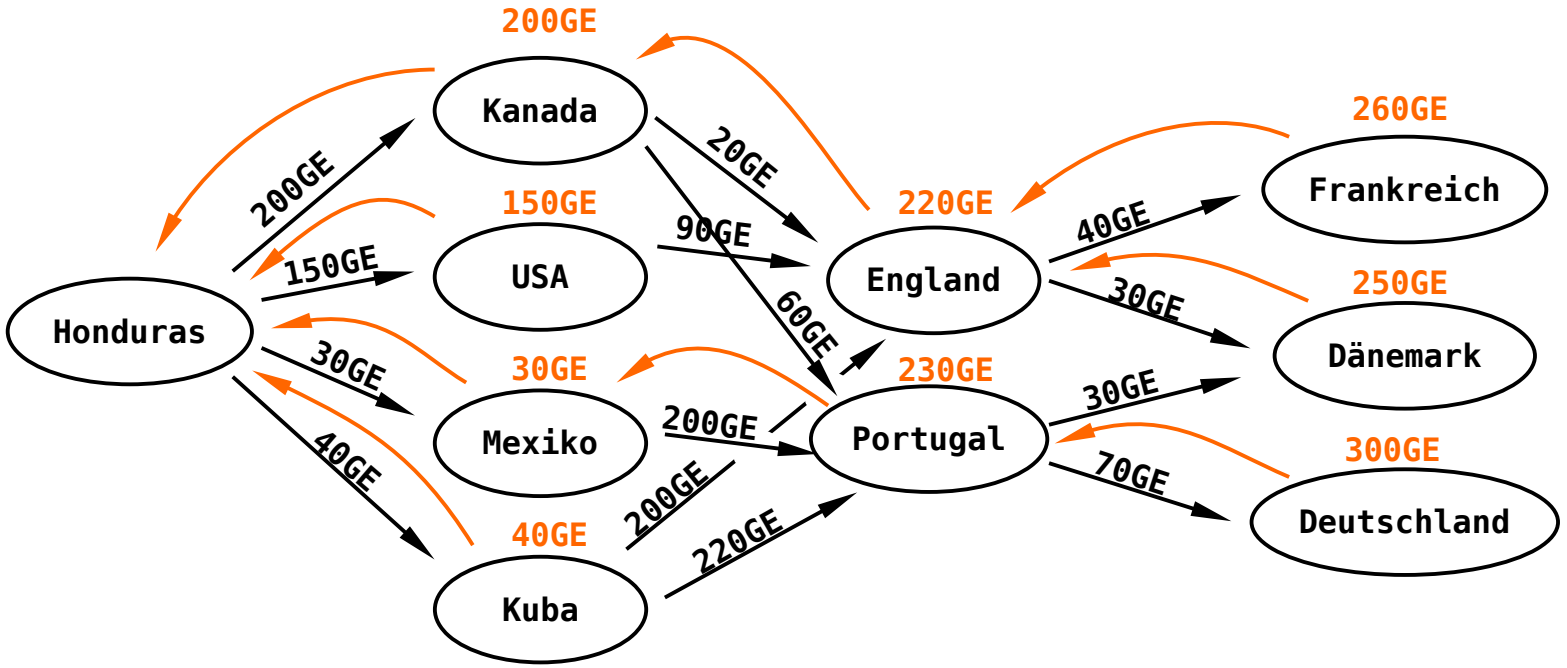
b) Welche (optimale) Route führt in diese drei Länder?

c) Weiterhin ist bekannt, dass ein korrupter Zollbeamte in England 20% der 500kg schweren Lieferung für sich behält. In Frankreich zahlt man für das Kilo 1,7GE, in Deutschland 1,3GE und in Dänemark 1,4GE. Welche Route ist unter diesen Umständen optimal?

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung

Dyn. Prog. Anwendung



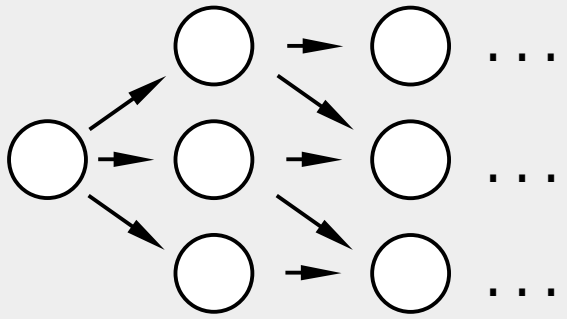
© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Time Warp = Dyn. Prog.?

Time-Warping lässt sich als Instanz der Dynamischen Programmierung interpretieren. Gegeben sei das folgende Tableau:

	1	**4**	**3**	**7**
2	A_1	B_2	C_1	D_5
3	E_2	F_1	G_0	H_4
8	I_7	J_4	K_5	L_1
6	M_5	N_2	O_3	P_1

Stellen Sie dieses in der Art der Dynamischen Programmierung dar. Zum Zeitpunkt t=0 gibt es noch nichts zu entscheiden, wir beginnen immer im Kästchen A.



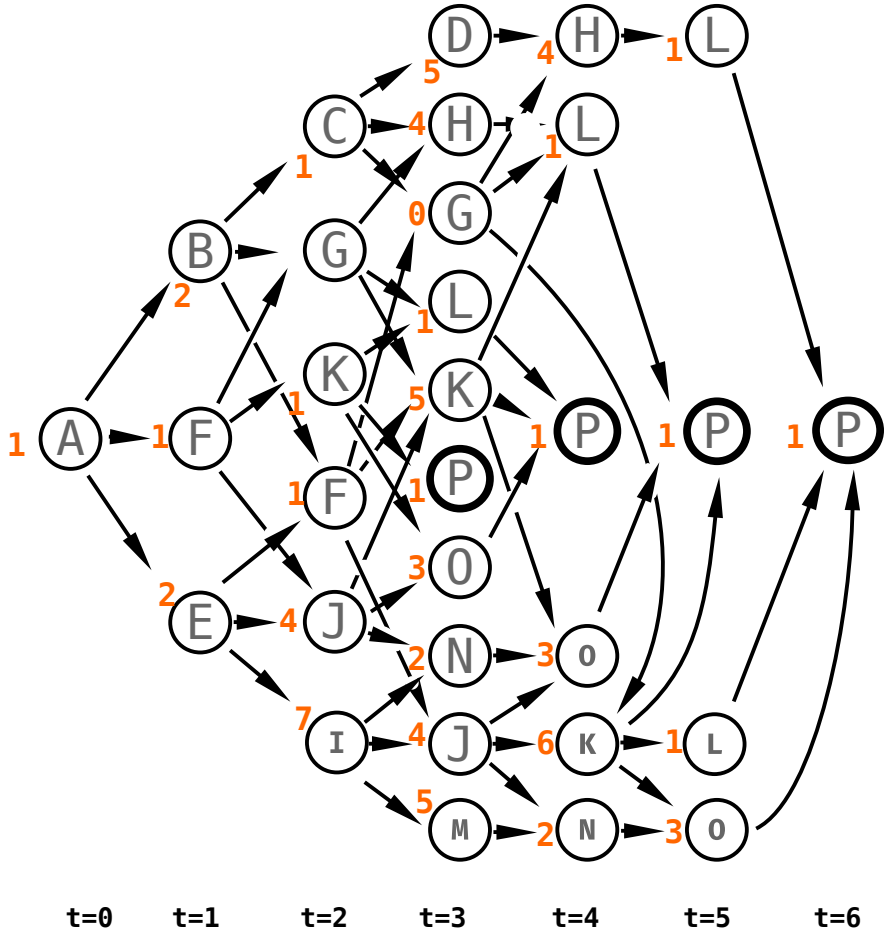
Danach verzweigt sich der Graph bis wir irgendwann im Endzustand P ankommen. Stelle Sie den gesamten Graphen für das Tableau dar und finden Sie auch gleich den optimalen (also kostenminimalen) Weg.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung

Time Warp = Dyn. Prog.?

	1	4	3	7
2	A 1	B 2	C 1	D 5
3	E 2	F 1	G 0	H 4
8	I 7	J 4	K 5	L 1
6	M 5	N 2	O 3	P 1

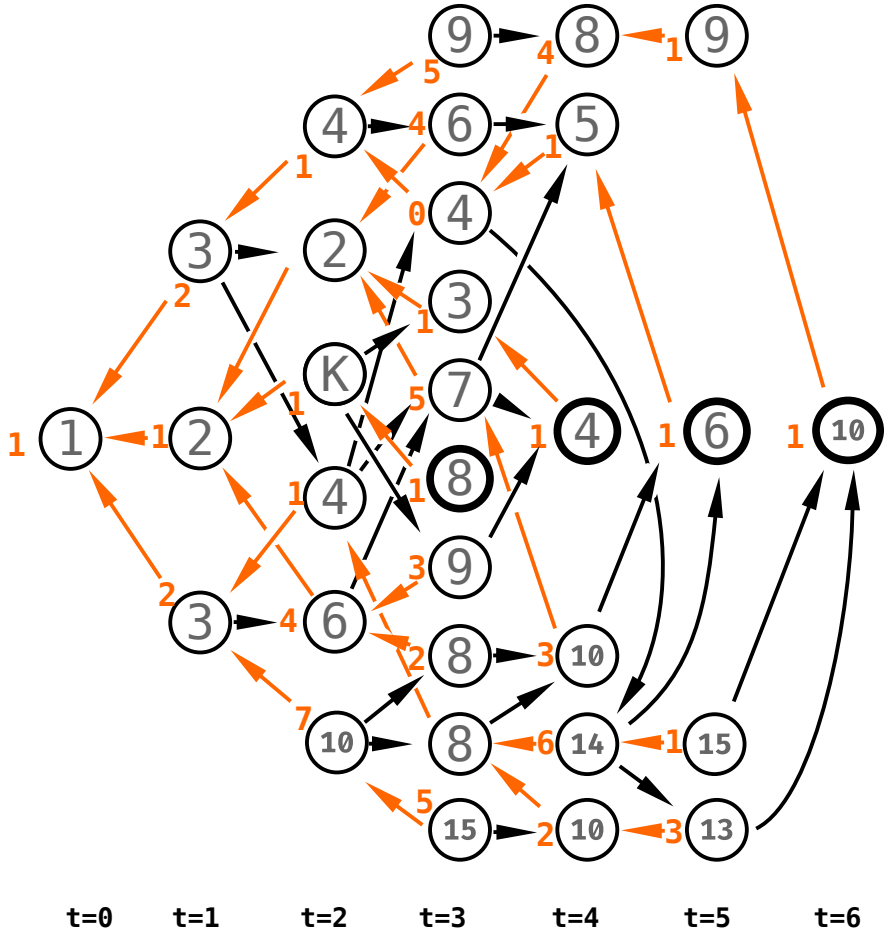


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Lösung

Time Warp = Dyn. Prog.?

	1	**4**	**3**	**7**
2	1	3	4	9
3	3	2	2	6
8	10	6	7	3
6	15	8	9	4



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.