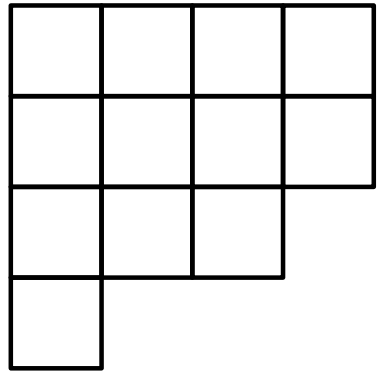
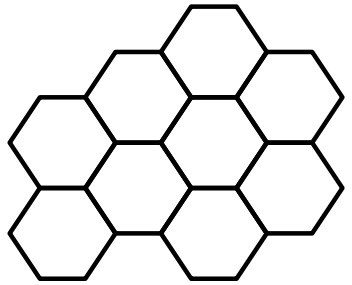
Nachbarschaften

Beim Erstellen digitaler Bilder diskretisiert man gleich mehrfach

- räumlich durch Auflösen in Zeilen und Spalten
- wertmäßig, durch digitalisieren der Grauwerte oder Farben
- durch Beschränkung auf einzelne Farben, statt das gesamte Spektrum zu berücksichtigen

Räumliche Diskretisierung findet fast immer durch ein Raster statt, denkbar sind aber auch andere Strukturen wie z.B. hexagonale.





© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Nachbarschaften

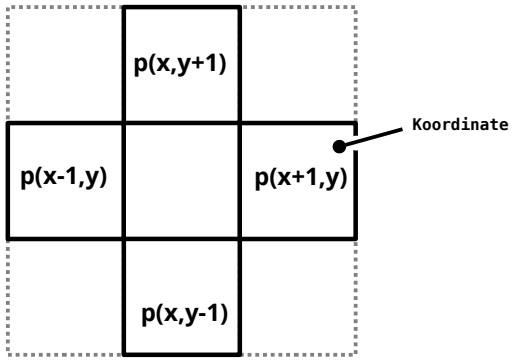
In der Bildverarbeitung werden häufig entweder 4er- oder 8er Nachbarschaften betrachtet.

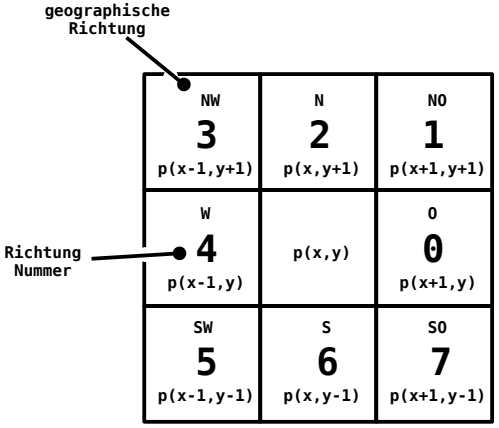
Zwei Pixel sind

- 4-zusammenhängend: Sie haben eine Kante gemeinsam
- 8-zusammenhängend: Sie haben mindestens einen Punkt gemeinsam

Digitale Kurve: Folge von Pixeln, die 8-zusammenhängend sind

Beachte: Bei technischen Anwendungen zeigt die Y-Achse manchmal nach unten. Warum?





© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Nachbarschaften

Wir übertragen die Überlegungen zu den Nachbarschaften von Pixeln aus der Vorlesung auf den 3D-Raum. Zur Erinnerung: Hier sprechen wir nicht von Pixeln sondern von Voxeln.

a) Auf welche drei Arten können benachbarte Voxel im 3D-Raum zusammenhängen?

b) Wie viele Nachbarn hat ein Voxel bei jeder dieser drei Nachbarschaften?

c) Eine Nachbarschaftsart hat offensichtlich immer die wenigsten Nachbarn. Wie viele Nachbarn hat ein Voxel im 4D-Raum mindestens?

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

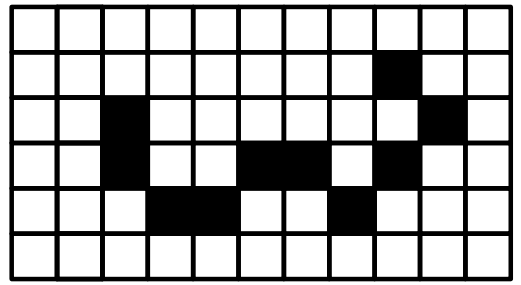
Freeman

Digitale Kurve: Folge von Pixeln, die 8-zusammenhängend sind.

Durch Kodierung des ersten Pixels in der Form (x, y) und die Kodierung jedes weiteren Pixels durch seine Richtung (siehe letzte Folie) kann eine Kurve effizient gespeichert werden.

Wie viele Bits braucht ein Pixel in der Freeman-Kodierung?

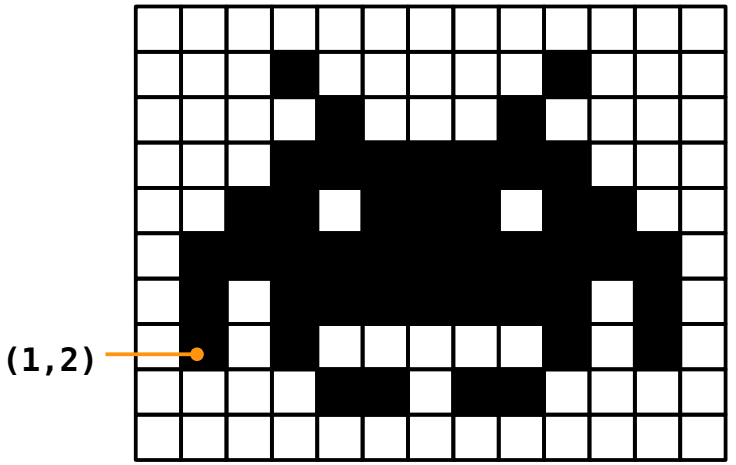
NW **3** p(x-1,y+1)	N **2** p(x,y+1)	NO **1** p(x+1,y+1)
W **4** p(x-1,y)	p(x,y)	O **0** p(x+1,y)
SW **5** p(x-1,y-1)	S **6** p(x,y-1)	SO **7** p(x+1,y-1)



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Freeman Kurve

a) Kodieren Sie die schwarzen Pixel der folgenden Grafik als (möglichst kurze) digitale Kurve nach dem Freeman-Kettencode. Wir gehen (implizit) davon aus, dass die Kurve bei Pixel (1,2) startet.



Zur Erinnerung:

```
3 2 1
4   0
5 6 7
```


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Freeman Kurve

b) Man kann eine Kurve um 90 Grad im Uhrzeigersinn drehen und sie, ausgehend vom gleichen Punkt auf der Kurve, wie vorher, noch einmal kodieren. Das ist aber unnötig, denn die Zahlen des Kettencodes verändern sich ganz vorhersehbar. Wie genau verändern sich die Zahlen des Kettencodes durch die 90 Grad Drehung?

c) Ein Programmierer soll ein Programm schreiben das ermittelt, ob eine digitale Kurve (wie oben verwendet) offen oder geschlossen ist. Er kann zwar programmieren, versteht aber nichts von Bildverarbeitung. Beschreiben Sie für den Programmierer ein Verfahren, das diese Aufgabe löst und das leicht in eine Programmiersprache umgesetzt werden kann. Alternativ können Sie auch am Beispiel zeigen, wie Ihr Algorithmus funktioniert.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Alternative Pixel-Anordnung

Nachdem Pixel (Picture Elements) seit einem halben Jahrhundert benachbarte Kästchen darstellen hat Sie Ihr Chef beauftragt ein neues Display zu entwickeln.

a) Weil er der Meinung ist, dass sich Fotos so besser darstellen lassen möchte er eine Anordnung, in der zwei benachbarte Pixel mindestens über eine gemeinsame Kante zusammenhängen. Wie könnten die Pixel aussehen?

b) Übertragen Sie die Idee des Freeman-Codes auf Ihr neues Display und kodieren Sie eine geschlossene Kurve, die mindestens einen Pixel in der Mitte einschließt.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Freeman

Tangente auf diskretem Raster berechnen

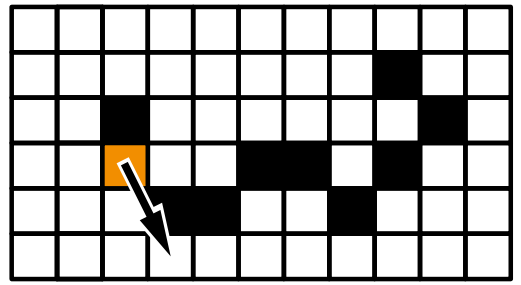
Die Tangente (Ableitung der Kurve) des markierten Pixels soll berechnet werden. Angenommen dieser hat die Koordinate **(2,2)**. Dazu betrachtet man den vorherigen und nachfolgenden Pixel, hier (2,3) und (3,1). Aus der Differenz der beiden ...

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

... erhält man eine Tangente (Pfeil) an die diskrete Kurve.

Bemerkung: Manchmal wird die Differenz auch aus dem markierten Pixel selbst und dem Nachfolger/Vorgänger genutzt. Oder die Differenz aus dem Vorvorgänger und dem Nachfolger des Nachfolgers. Oder ein gewichtetes Mittel aus mehreren Nachbarn.

NW **3** p(x-1,y+1)	N **2** p(x,y+1)	NO **1** p(x+1,y+1)
W **4** p(x-1,y)	p(x,y)	O **0** p(x+1,y)
SW **5** p(x-1,y-1)	S **6** p(x,y-1)	SO **7** p(x+1,y-1)



Freeman

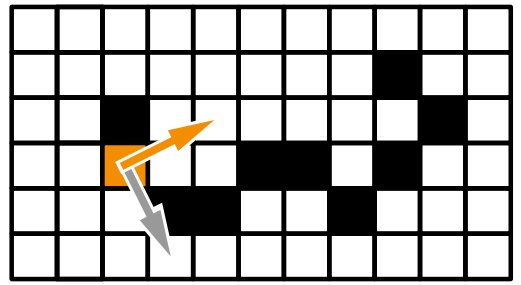
Digitale Kurve: Lot auf diskretem Raster berechnen

Das Lot auf die Tangente erhält man in 2D einfach durch Vertauschen der beiden Komponenten und durch Multiplizieren einer (bel.) Komponente mit (-1).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da man eine beliebige der beiden Komponenten mit (-1) multiplizieren darf, ergeben sich zwei Varianten, hier also auch (-2,-1).

NW **3** p(x-1,y+1)	N **2** p(x,y+1)	NO **1** p(x+1,y+1)
W **4** p(x-1,y)	p(x,y)	O **0** p(x+1,y)
SW **5** p(x-1,y-1)	S **6** p(x,y-1)	SO **7** p(x+1,y-1)



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Linientest

Freeman Kurve eine Linie?

Fakultät Angewandte Computer- und Biowissenschaften
HOCHSCHULE MITTWEIDA

Freeman

Wann ist eine digitale Kurve eine Linie?

1) Wir setzen CC0=CC

a) CC enthält höchstens zwei verschiedene Codeelemente
b) Die Codeelemente von CC repräsentieren benachbarte Richtungen
c) Eine der Codeziffern ist singulär (d.h., sie tritt nicht 2x hintereinander auf)

2) Ist i >= 1 und CCi-1 nicht die leere Menge, so entsteht CCi aus CCi-1, indem jede Folge von nichtsingulären Elementen zwischen zwei singulären Elementen durch ihre Länge ersetzt wird und alle singulären Elemente gestrichen werden. Ist die Länge von CCi kleiner als 3, ist nichts weiter zu fordern, die Kurve ist eine Linie.

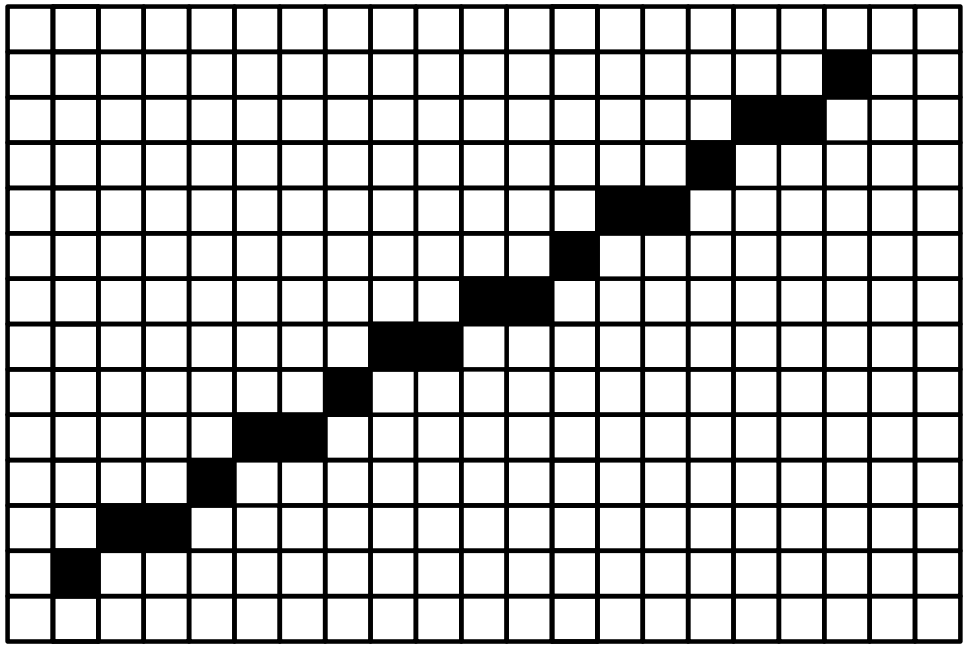
Andernfalls gilt für CCi sinngemäß 1a) – 1c).

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Freeman

Beispiel 1:

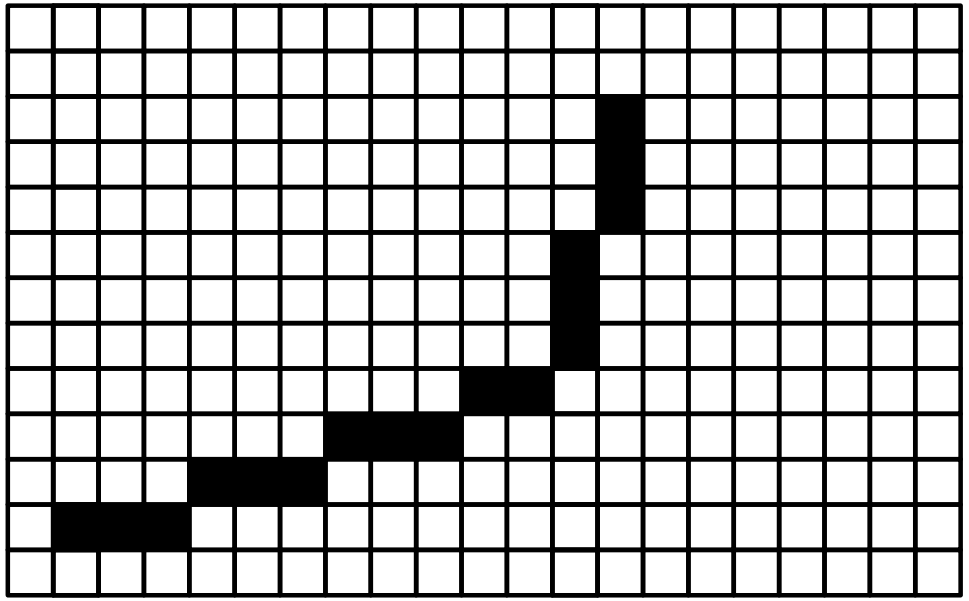
(ohne Widerspruch)



Freeman

Beispiel 2:

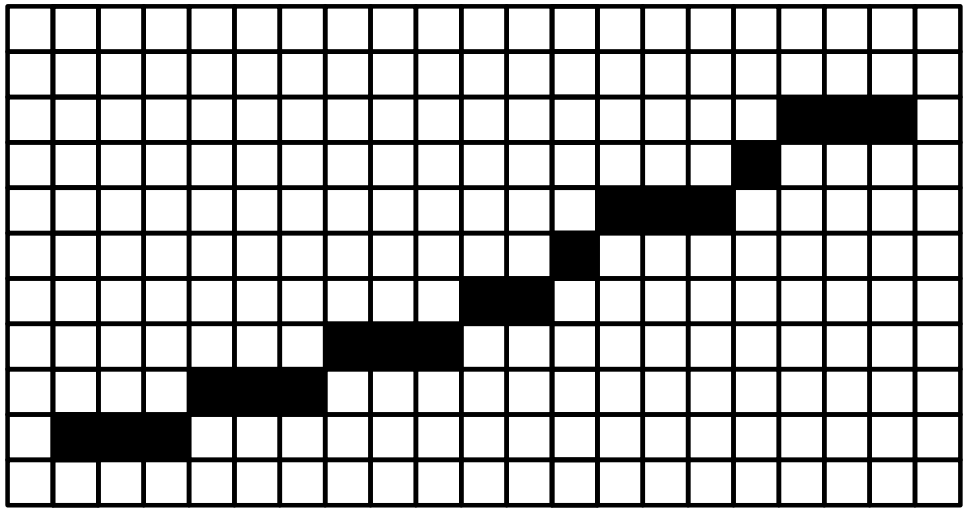
(mit Widerspruch)



Freeman

Beispiel 2:

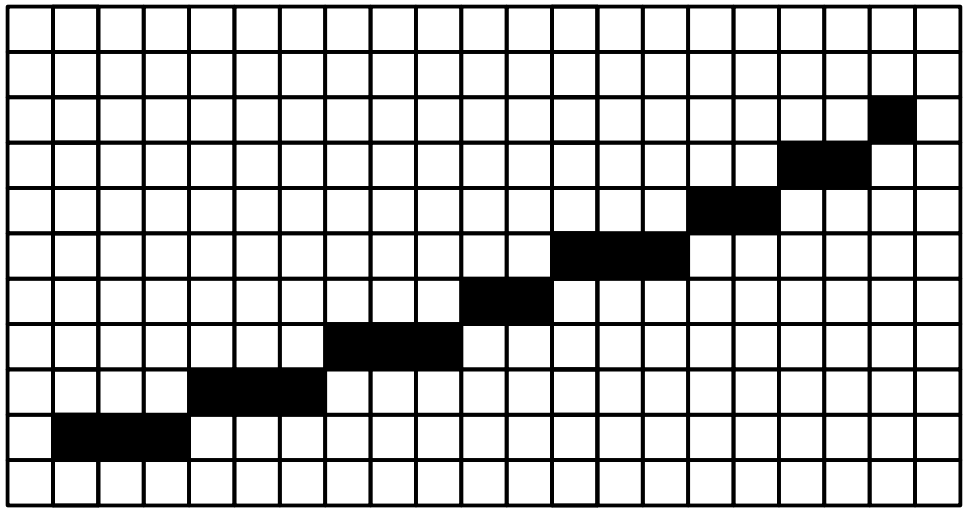
(mit Widerspruch)



Freeman

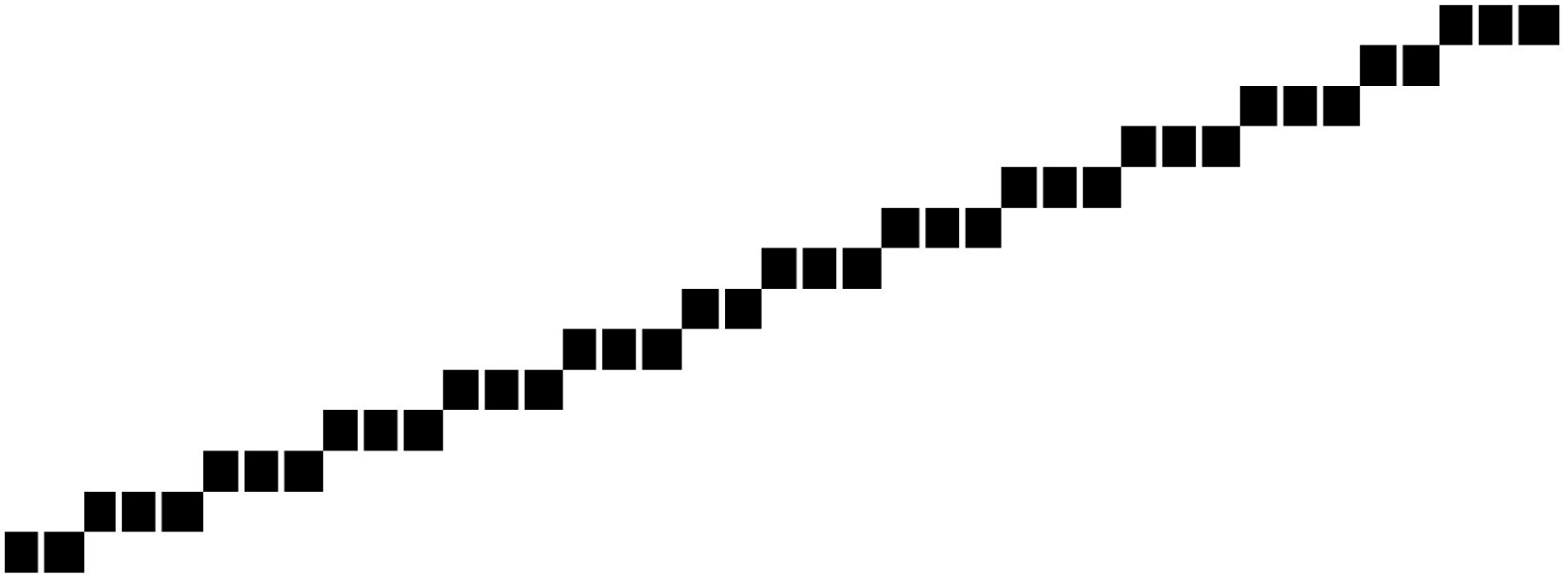
Beispiel 2:

(mit Widerspruch)



Praktikum
Liniennachweis

a) Testen Sie, ob die folgende Kurve eine Linie ist und begründen Sie Ihre Einschätzung.



Praktikum
Liniennachweis

b) Erzeugen Sie eine Linie als Freeman-Code, die frühestens nach der 3. Iteration scheitert.

   Hinweis: Mit 3. Iteration ist gemeint: Linie als Freeman-Code aufschreiben (1. Iteration), singuläre Elemente streichen und Zusammenfassen (2. Iteration), nochmal singuläre Elemente streichen und zusammenfassen (3. Iteration).

c) Zeichnen Sie Ihre Linie als Pixel. Erläutern Sie auf Grundlage der Zeichnung was an der Linie nicht perfekt ist und wie man sie korrigieren kann.

Anwendung

Zeichenerkennung

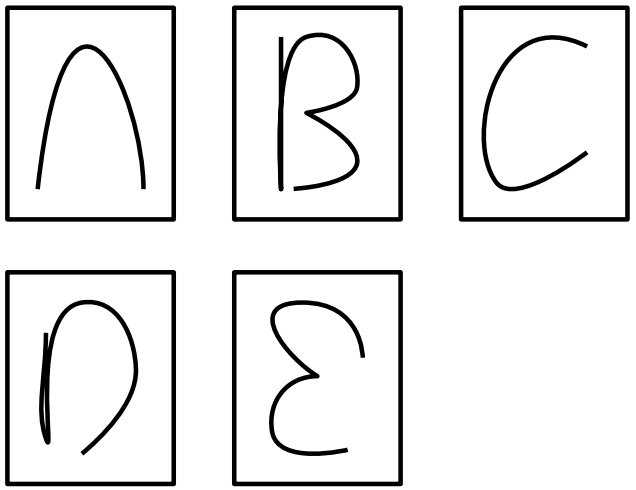
Fakultät Angewandte Computer- und Biowissenschaften
HOCHSCHULE MITTWEIDA

Time-Warping

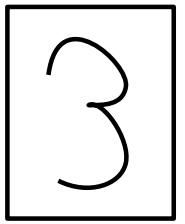
Anwendung: Zeichenerkennung

Erkannt werden sollen Buchstaben in Schreibschrift (hier ohne Absetzen).

Dazu muss das vom Benutzer eingegebene Symbol mit den gespeicherten Mustern abgeglichen werden. Die beste Übereinstimmung gilt als Treffer. In aufwendigeren Systemen werden bei mehreren möglichen Übereinstimmungen noch Wörterbücher oder Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Buchstaben zur Verbesserung der Erkennungsrate eingesetzt.



Referenzbuchstaben



Benutzereingabe

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

Anwendung: Handschrifterkennung

Time-Warping

Für den Vergleich zwischen Referenzbuchstaben und der Benutzereingabe müssen Kurven miteinander verglichen werden. Problem:

- Kurven können an unterschiedlichen Stellen verschieden schnell/lang sein
- Trotz Abweichungen der Krümmungen können Kurven ähnlich sein

Lösung: Die Kurven so miteinander vergleichen, dass unterschiedliche Geschwindigkeiten auf beiden erlaubt sind.

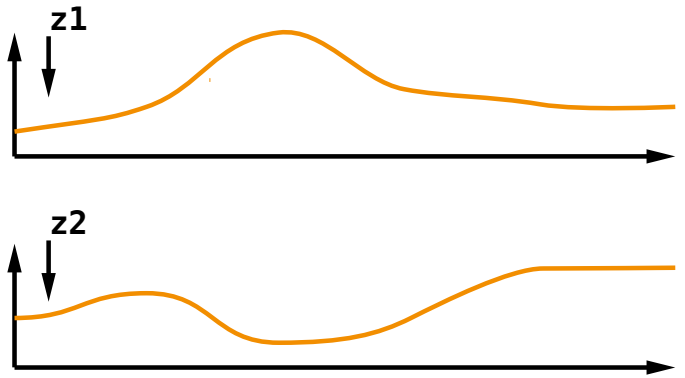
Time-Warping

Time-Warping (Beispiel 2 Signale vergleichen)

Beide Zeiger z1 und z2 sollen sich an das Ende ihrer Kurve bewegen. Sie sind bestrebt zu jedem Zeitpunkt möglichst die gleiche Höhe zu haben. Um das zu erreichen, dürfen sie lediglich ihre Geschwindigkeit verändern, jedoch nicht negativ

Optimaler Verlauf:

- Zuerst bleibt z2 stehen, z1 bewegt sich so lange weiter, bis beide auf gleicher Höhe sind.
- Dann bewegen sich beide „bergauf“, z2 jedoch langsamer.
- z2 wartet am höchsten Punkt, bis z1 über den Gipfel gelaufen ist. Wieder auf gleiche Höhe angelangt nehmen beide den Abstieg usw...

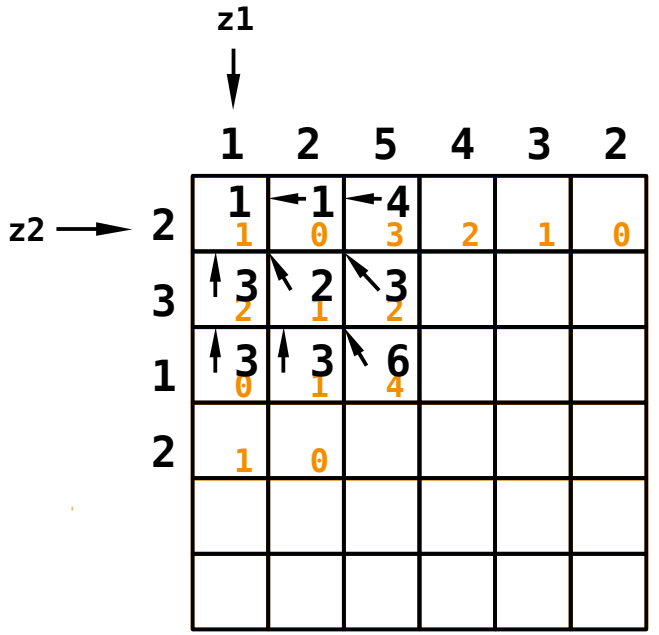


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

Das optimale Fortschreiten auf jeder Kurve kann mittels der Dynamischen Programmierung berechnet werden:

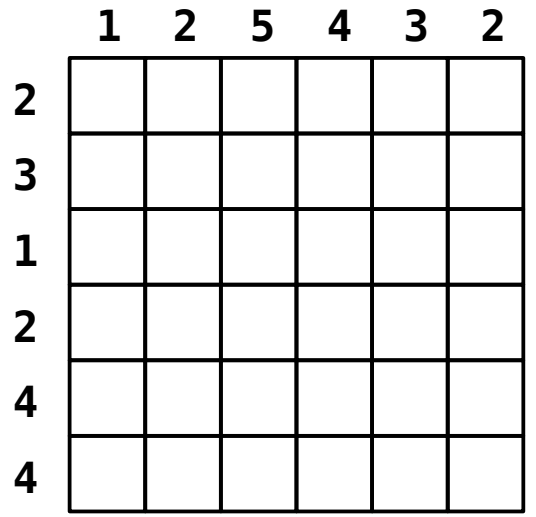
- Jedes Feld enthält die lokalen Kosten (in Orange) als Differenz der Werte beider Kurven. Die schwarzen Einträge bezeichnen die kumulierten (aufsummierten) Kosten, die entlang der Pfeile auf dem Weg von links oben bereits aufgelaufen sind.
- In jedem Feld stellen wir uns die Frage: Aus welchem vorherigen Feld sollten wir kommen? Dabei ist die beste Wahl das Feld mit den geringsten (schwarzen) Kosten. Zur Auswahl stehen dabei nur das obere, das linke oder (je nach Anwendung diagonal) das linke obere Feld. Wir wählen das optimale Feld und markieren die Wahl durch einen Pfeil.
- Die neuen (schwarzen) Kosten für unser aktuelles Feld berechnen sich aus den (schwarzen) Kosten des zuvor gewählten Feldes, plus den (roten) Kosten des aktuellen.
- Zum Schluss ergibt sich der optimale Gesamtpfad durch Verfolgen der Pfeile, ausgehend vom ganz rechten unteren Feld zum Startfeld ganz links oben.



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

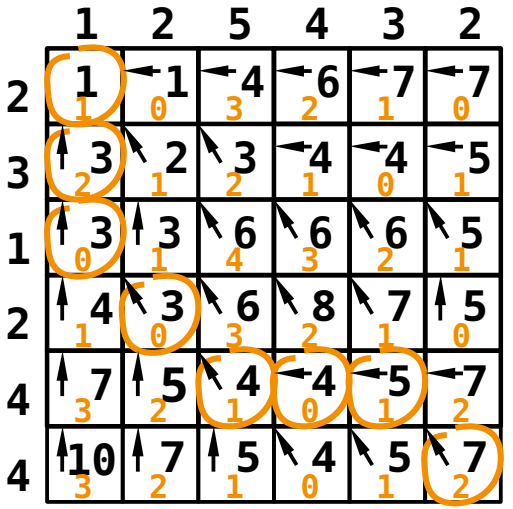
Beispiel



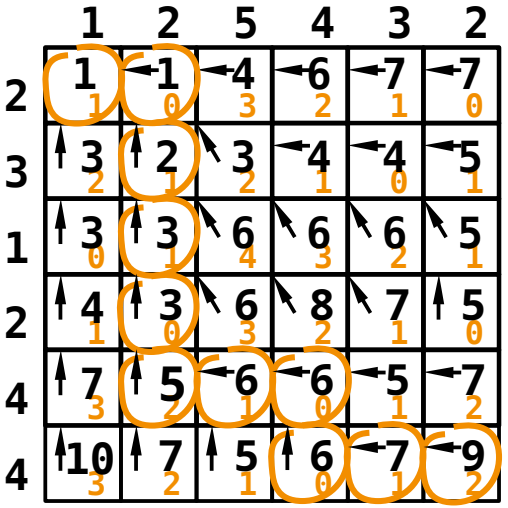
© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

Optimales Ergebnis, **mit diagonalen** Sprüngen. Es ist erlaubt sich auf beiden Kurven gleichzeitig einen Schritt weiter zu bewegen (typischer Fall).



Optimales Ergebnis, wenn **keine diagonalen Sprünge** zugelassen werden. Mit anderen Worten: Entweder der Zeiger (z1/z2 auf vorheriger Folie) der einen oder der anderen Kurve darf sich bewegen, nicht beide gleichzeitig.



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Time-Warping

Alice möchte sich mit Bob in Mittweida treffen. Sie kommt aus Rochlitz, westlich von Mittweida, er aus Hainichen das weiter östlich liegt. Um die Trennung während der Anreise erträglicher zu machen, wollen beide wenigsten möglichst auf Augenhöhe reisen. Dafür wollen Alice und Bob ihre Reisegeschwindigkeit so anpassen, dass die Differenzen Ihrer Höhen insgesamt minimal werden. Die Höhen auf dem Weg nach Mittweida seien die folgenden:

Alice: 7 6 7 1 0 3 2 1 1 2 1

Bob : 6 6 5 4 4 3 2

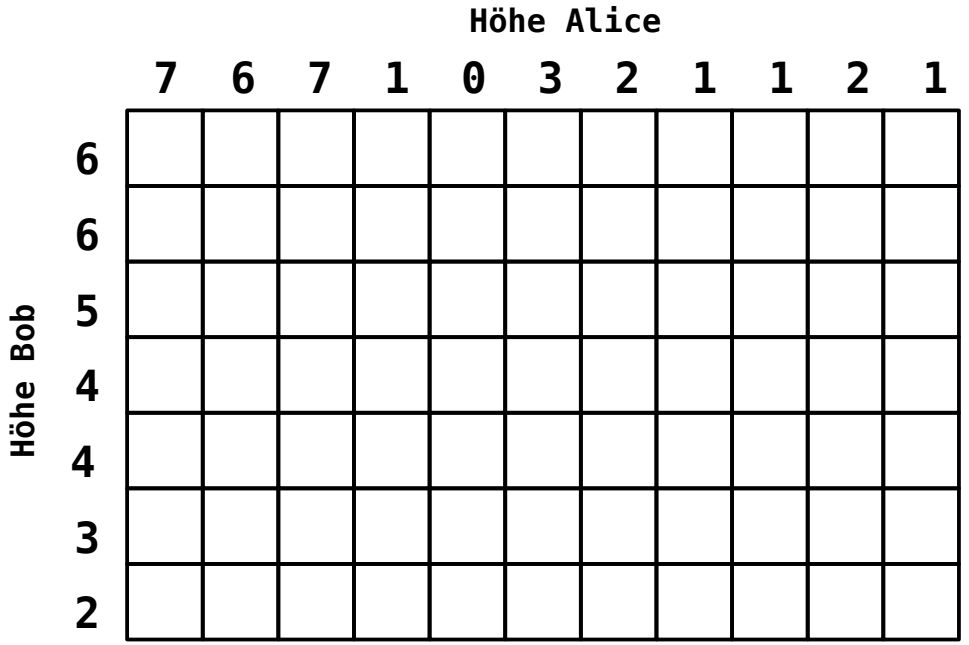
Sie können die Matrix dafür nutzen für beide die optimale Reisegeschwindigkeit zu ermitteln, d.h. wer den jeweils nächsten Schritt macht (auchbeide gleichzeitig ist möglich).

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Time-Warping

Alice: 7 6 7 1 0 3 2 1 1 2 1

Bob : 6 6 5 4 4 3 2

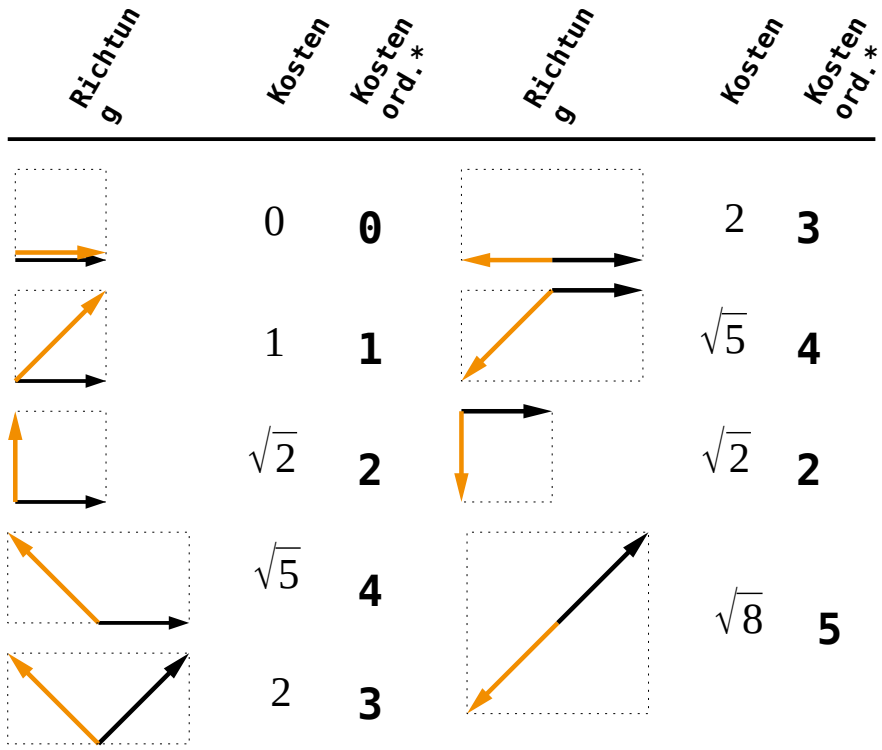


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

Zehn mögliche Fälle unterschiedlicher Richtungen (siehe Abb.). Statt der eigentlichen Differenz (Kosten) zwischen zwei Richtungen reicht uns eine ganzzahlige Kostenbewertung (Kosten ordinal), die lediglich die Reihenfolge der echten Kosten abbilden muss.

Richtung	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	4	3	4	2	1
1	1	0	1	3	4	5	4	3
2	2	1	0	1	2	4	3	4
3	4	3	1	0	1	3	4	5
4	3	4	2	1	0	1	2	4
5	4	5	4	3	1	0	1	3
6	2	4	3	4	2	1	0	1
7	1	3	4	5	4	3	1	0

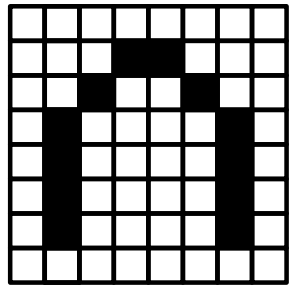


© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

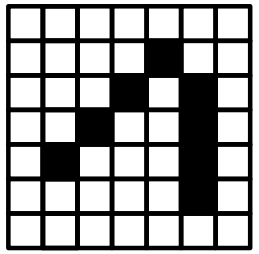
Time-Warping

Zehn mögliche Fälle unterschiedlicher Richtungen (siehe Abb.). Statt der eigentlichen Differenz (Kosten) zwischen zwei Richtungen reicht uns eine ganzzahlige Kostenbewertung (Kosten ordinal), die lediglich die Reihenfolge der echten Kosten abbilden muss.

Richtung	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	4	3	4	2	1
1	1	0	1	3	4	5	4	3
2	2	1	0	1	2	4	3	4
3	4	3	1	0	1	3	4	5
4	3	4	2	1	0	1	2	4
5	4	5	4	3	1	0	1	3
6	2	4	3	4	2	1	0	1
7	1	3	4	5	4	3	1	0



2,2,2,1,
1,0,7,7,
6,6,6



1,1,1,
7,6,6,
6

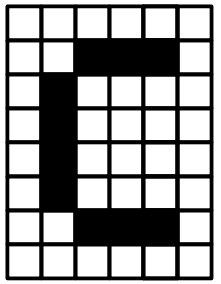
Kandidatensymbol 1

Benutzereingabe	2	2	2	1	1	0	7	7	6	6	6
1	1 (1)	2 (1)	3 (1)	3 (0)	3 (0)	4 (1)	7 (3)	10 (3)	14 (4)	18 (4)	22 (4)
1	2 (1)	2 (1)	3 (1)	3 (0)	3 (0)	4 (1)	7 (3)	10 (3)	14 (4)	18 (4)	22 (4)
1	3 (1)	3 (1)	3 (1)	3 (0)	3 (0)	4 (1)	7 (3)	10 (3)	14 (4)	18 (4)	22 (4)
7	7 (4)	7 (4)	7 (4)	6 (3)	6 (3)	4 (1)	4 (0)	4 (0)	5 (1)	6 (1)	7 (1)
6	10 (3)	10 (3)	10 (3)	10 (4)	10 (4)	6 (2)	5 (1)	5 (1)	4 (0)	4 (0)	4 (0)
6	13 (3)	13 (3)	13 (3)	14 (4)	14 (4)	8 (2)	6 (1)	6 (1)	4 (0)	4 (0)	4 (0)
6	16 (3)	16 (3)	16 (3)	18 (4)	18 (4)	10 (2)	7 (1)	7 (1)	4 (0)	4 (0)	4 (0)

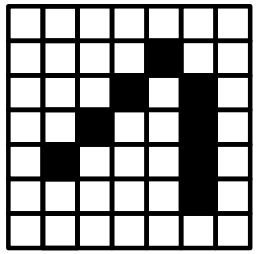
© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

Zehn mögliche Fälle unterschiedlicher Richtungen (siehe Abb.). Statt der eigentlichen Differenz (Kosten) zwischen zwei Richtungen reicht uns eine ganzzahlige Kostenbewertung (Kosten ordinal), die lediglich die Reihenfolge der echten Kosten abbilden muss.



4,4,3,
2,2,2,
1,0,0



1,1,1,
7,6,6,
6

Richtung

Richtung	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	4	3	4	2	1
1	1	0	1	3	4	5	4	3
2	2	1	0	1	2	4	3	4
3	4	3	1	0	1	3	4	5
4	3	4	2	1	0	1	2	4
5	4	5	4	3	1	0	1	3
6	2	4	3	4	2	1	0	1
7	1	3	4	5	4	3	1	0

Kandidatensymbol 2

Benutzereingabe

Benutzereingabe	4	4	3	2	2	2	1	0	0
1	4 (4)	8 (4)	11 (3)	12 (1)	13 (1)	14 (1)	14 (0)	15 (1)	16 (1)
1	8 (4)	8 (4)	11 (3)	12 (1)	13 (1)	14 (1)	14 (0)	15 (1)	16 (1)
1	12 (4)	12 (4)	11 (3)	12 (1)	13 (1)	14 (1)	14 (0)	15 (1)	16 (1)
7	16 (4)	16 (4)	16 (5)	15 (4)	16 (4)	17 (4)	17 (3)	15 (1)	16 (1)
6	18 (2)	18 (2)	20 (4)	18 (3)	18 (3)	19 (3)	21 (4)	17 (2)	17 (2)
6	20 (2)	20 (2)	22 (4)	21 (3)	21 (3)	21 (3)	23 (4)	19 (2)	19 (2)
6	22 (2)	22 (2)	24 (4)	24 (3)	24 (3)	24 (3)	25 (4)	21 (2)	21 (2)

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Time-Warping

Übereinstimmung:

Ben. Eing. <–> Muster 1: Kosten 4 / Pfadlänge 10

Ben. Eing. <–> Muster 2: Kosten 21 / Pfadlänge 8

Für einen fairen Vergleich müssen wir die Kosten durch die Pfadlänge teilen, damit längere Pfade nicht grundsätzlich benachteiligt werden (d.h., wir normieren die Kosten auf die Pfadlänge 1).

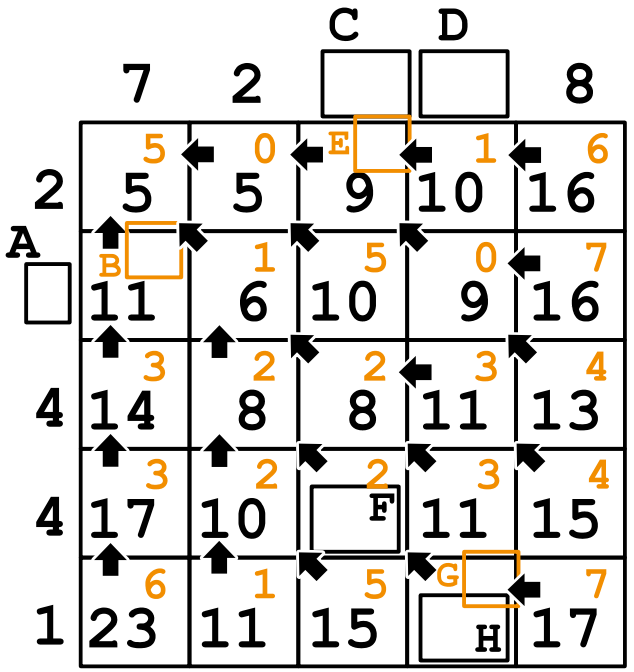
In jedem Fall gewinnt hier die Übereinstimmung mit Muster 1.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum

Time-Warping

Finden Sie sinnvolle Werte für Kästchen A-H:



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

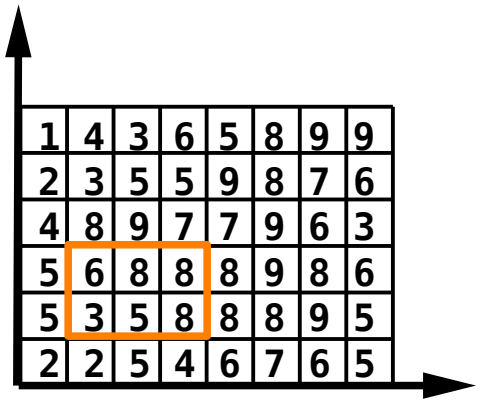
Der Gradient

(siehe Video) – keine Folien

Gradient

Praktikum
Gradient

a) Berechnen Sie für jeden Pixel im orange umrandeten Bereich den Betrag des Gradienten:
b) Der Gradient (als Vektor) zeigt lt. Vorlesung in die Richtung der größten Grauwert-veränderung. Wir würden gerne wissen, in welche Richtung sich die Grauwerte im Bild am wenigsten verändern. Berechnen Sie dies exemplarisch für einen der Pixel.



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

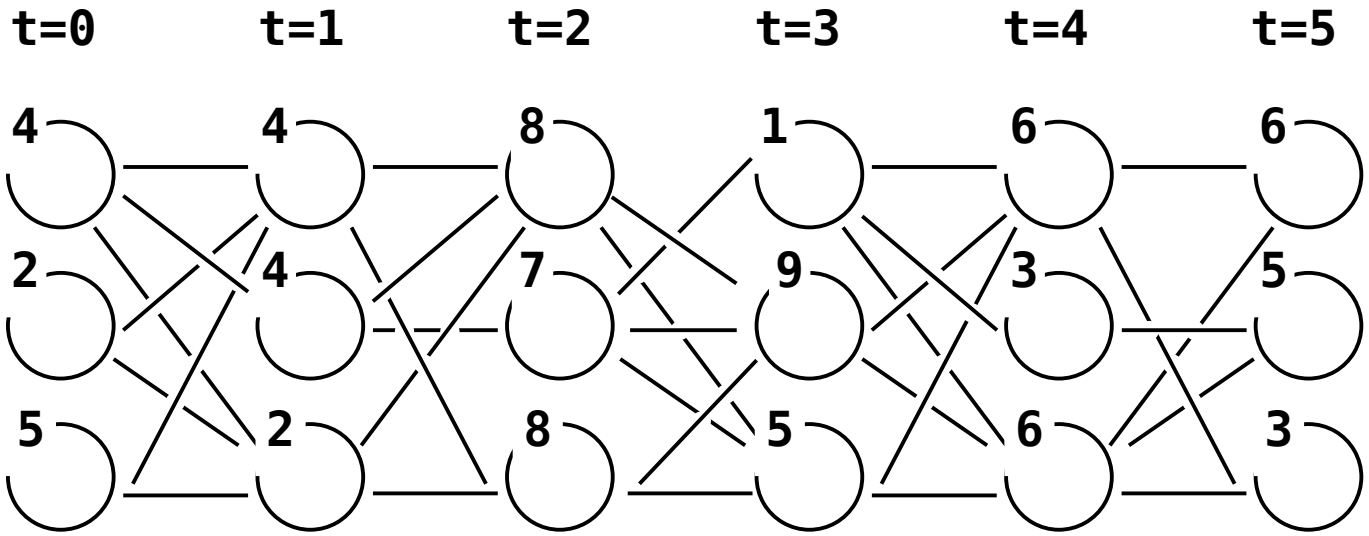
Dynamische Programmierung

(siehe Video) – keine Folien

Fakultät Angewandte Computer- und Biowissenschaften
HOCHSCHULE MITTWEIDA

Praktikum
Dyn. Programmierung

Zu 6 Zeitpunkten können jeweils 3 Entscheidungen getroffen werden. Deren einzelne Kosten sind an den jeweiligen Knoten vermerkt.
Welches ist der kostenminimale Pfad von t=0 nach t=5 und die hoch sind die minimalen Kosten?



© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Dyn. Prog. Anwendung

Drogen sollen von Honduras nach Frankreich, Deutschland oder Dänemark gebracht werden. Es ist bekannt, dass Drogenkartelle ihre Gewinn maximieren wollen. Entsprechend ist die wahrscheinlichste Route die mit den geringsten Kosten. Sie haben die Aufgabe die wahrscheinlichste Route zu ermitteln, damit die Drogen abgefangen werden können.

Ausgehend von Honduras gibt es vier typische nächste Ziele, darunter Kanada und die USA. Beide müssen mit teuren halbtauchenden U-Booten angelaufen werden, die nur einmal Verwendung finden. Die Fahrt nach Kanada kostet 200 Geldeinheiten (GE), die in die USA 150GE.

Billiger geht es mit dem Fischerboot nach Kuba (40GE) oder Mexiko (30GE).

Im zweiten Teil der Reise können nur England oder Portugal angelaufen werden. Aufgrund der vielen Handelsverbindungen zwischen Kanada nach England lassen sich die Drogen leicht auf Riesentankern verstecken. Das geringe Entdeckungsrisiko bringt den Verbindungsmännern auf den Schiffen nur 20GE ein. Kanada -> Portugal kostet 60GE. Ausgehend von den USA kennt das Drogenkartell nur Verbindungen nach England für 90GE.

Von Mexiko aus kennt das Kartell nur eine Route nach Portugal. Manchmal gelingt es rivalisierenden Banden die Ware abzufangen und über eigene Kanäle zu verkaufen. Der kartelleigene Mathematiker hat daher berechnet, dass die Selbstversicherung der Ware inkl. Transport 200GE kostet.
Die Lage im kommunistischen Kuba ist für Drogentransporte kritisch. Die Verschiffung nach England kostet daher 200GE, die nach Portugal 220GE.
Ausgehend von England hat das Kartell einen Vertriebsweg nach Frankreich (40GE) und Dänemark (30 GE). Ausgehend von Portugal kann Deutschland für 70GE und Dänemark für 30GE beliefert werden.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Dyn. Prog. Anwendung

Die Gemengelage scheint unübersichtlich, die Interpretation der Optimierungsaufgabe ist jedoch eine einfache Anwendung der Dynamischen Programmierung.

a) Was kostet der Transport für das Zielland Frankreich, Dänemark und Deutschland?

b) Welche (optimale) Route führt in diese drei Länder?

c) Weiterhin ist bekannt, dass ein korrupter Zollbeamte in England 20% der 500kg schweren Lieferung für sich behält. In Frankreich zahlt man für das Kilo 1,7GE, in Deutschland 1,3GE und in Dänemark 1,4GE. Welche Route ist unter diesen Umständen optimal?

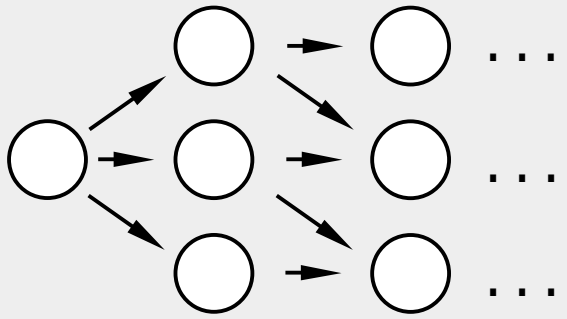
© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.

Praktikum
Time Warp = Dyn. Prog.?

Time-Warping lässt sich als Instanz der Dynamischen Programmierung interpretieren. Gegeben sei das folgende Tableau:

	1	**4**	**3**	**7**
2	A_1	B_2	C_1	D_5
3	E_2	F_1	G_0	H_4
8	I_7	J_4	K_5	L_1
6	M_5	N_2	O_3	P_1

Stellen Sie dieses in der Art der Dynamischen Programmierung dar. Zum Zeitpunkt t=0 gibt es noch nichts zu entscheiden, wir beginnen immer im Kästchen A.



Danach verzweigt sich der Graph bis wir irgendwann im Endzustand P ankommen. Stelle Sie den gesamten Graphen für das Tableau dar und finden Sie auch gleich den optimalen (also kostenminimalen) Weg.

© Thomas Haenselmann, Prof. Dr. rer. nat. habil.